

TD1 : Variables aléatoires et tableur



Version web

Ex 1

Calculs avec une loi normale

CXUp

On suppose que la durée annuelle de travail des personnes non-salariées suit une loi normale d'espérance 2600 heures et d'écart-type de 200 heures.

Quelle est la probabilité pour qu'un non-salarié pris au hasard travaille moins de 3000 heures ? Entre 2500 heures et 2700 heures ? Faire les calculs avec la table de valeurs puis vérifier avec un tableur.

Ex 2

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

2Aw2

Un restaurant universitaire qui est visité par 600 étudiants pour le repas de midi offre un choix de deux plats principaux : risotto ou quiche. Dans le passé, on a observé que 40% des étudiants prennent du risotto.

Combien de plats de risotto faut-il prévoir pour que la probabilité qu'il en manque soit inférieure à 10% ?



Soit X le nombre d'étudiants souhaitant un plat de risotto. D'après les données de l'énoncé, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(600, 0.4)$.

On cherche donc un entier n tel que $P(X \geq n) \leq 0.1$. Pour ce faire, on approche la loi de X par une loi normale. L'effectif n est supérieur à 30 donc d'après le théorème central limite, X suit approximativement une loi normale de paramètres $\mu = 600 \times 0.4 = 240$ et de variance $\sigma^2 = 600 \times 0.4 \times 0.6 = 144 = 12^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P(X \geq n) \leq 0.1 &\iff P\left(\frac{X - 240}{12} \geq \frac{n - 240}{12}\right) \leq 0.1 \\
 &\iff P\left(\frac{X - 240}{12} \leq \frac{n - 240}{12}\right) \geq 0.9 && \iff \frac{n - 240}{12} \geq 1.28 \\
 &\iff n \geq 12 \times 1.28 + 240 = 255.36 \\
 &\iff n \geq 256
 \end{aligned}$$

Il faut donc prévoir au moins 256 plats de risotto pour que le risque qu'il en manque soit inférieur à 10%.

Ex 3

Lois pour les statistiques

EZfx

La bestiole est un animal dont le poids est distribué selon une loi normale de moyenne 100 g et d'écart-type 5 g.

On prélève un échantillon aléatoire de 16 bestioles. On note X_i le poids de la bestiole numéro i ($1 \leq i \leq 16$).

1. Déterminer la loi suivie par

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16}$$



Par propriétés de somme de lois normales, on obtient que $\bar{X}$ suit une loi normale. Il reste à calculer $\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{16} \times 16 \times 100 = 100$ et $V(\bar{X}) = \frac{1}{16^2} \times 16 \times 5^2 = \frac{5^2}{16}$. On en déduit que $\bar{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(100, \sigma = \frac{5}{4})$.

2. Déterminer la loi suivie par

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{16} (X_i - 100)^2}{25}$$

Déterminer le réel q tel que $P(Q > q) = 0.05$.



On réécrit $Q = \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{X_i - 100}{5}\right)^2$ or $\frac{X_i - 100}{5}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et les variables X_i sont indépendantes donc par définition, Q suit une loi $\chi^2(16)$. On cherche maintenant q tel que $P(Q \leq q) = 0.95$ dans la table de valeurs soit $q = 26.296$.

3. Déterminer la loi suivie par

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2}{25}$$

puis déterminer le réel v tel que $P(V > v) = 0.05$.



D'après le théorème de Fisher, V suit une loi $\chi^2(15)$. Par lecture de table, on trouve $P(V \leq v) = 0.95$ pour $v = 24.996$.

4. Déterminer la loi suivie par

$$W = \frac{(\bar{X} - 100)4\sqrt{15}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2}}$$

Déterminer le réel w tel que $P(W > w) = 0.05$.



D'après la question 1, la variable $\frac{\bar{X} - 100}{\frac{5}{4}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On réécrit maintenant :

$$W = \frac{\frac{\bar{X} - 100}{\frac{5}{4}} \times \frac{5}{4} \times 4\sqrt{15}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{\frac{\bar{X} - 100}{\frac{5}{4}}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2}}{5\sqrt{15}}} = \frac{\frac{\bar{X} - 100}{\frac{5}{4}}}{\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{15}}}$$

Or V suit une $\chi^2(15)$ d'après la question précédente. Donc par définition, W suit une loi de Student $St(15)$.

Ex 4

Lois pour les statistiques

Jiv8

Soient 9 variables aléatoires indépendantes, normales centrées réduites notées $(U_i)_{1 \leq i \leq 9}$.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^9 U_i^2$? Déterminer le réel x tel que $P(X > x) = 0.05$.



On a $X \sim \chi^2(9)$ et $x = 16.92$.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 3, indépendante de X . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \frac{Y-10}{\sqrt{X}}$? Déterminer le réel z tel que $P(Z > z) = 0.05$.



On a $Z = \frac{Y-10}{\sqrt{\frac{X}{9}}}$ donc par définition, Z suit une loi de Student $St(9)$ et $z = 1.833$.

3. Soit V une variable aléatoire distribuée selon une loi du χ^2 à 3 degrés de liberté, indépendante de X . Quelle est la loi suivie par $W_1 = \frac{X}{3V}$? Quelle est la loi suivie par $W_2 = \frac{3V}{X}$? Déterminer le réel w_2 tel que $P(W_2 > w_2) = 0.05$.



On a $W_1 = \frac{X}{\frac{3}{V}}$ donc W_1 suit une loi de Fisher $F(9, 3)$. De même, $W_2 = \frac{3V}{X}$ donc W_2 suit une loi de Fisher $F(3, 9)$. On a $w_2 = 0.325$.

Ex 5

Application du théorème central limite

dHzJ

On considère une production de feuilles cartonnées dont l'épaisseur est modélisée par une variable aléatoire qui a pour espérance 5 mm et pour écart type 0,4 mm.

Considérant un paquet de 100 feuilles choisies au hasard de manière indépendante, comment calculer la probabilité que ce paquet ait une épaisseur comprise entre 49 et 51 cm?



Soit $X_1, \dots, X_{100}$ un échantillon où X_i représente l'épaisseur d'une feuille, $E(X_i) = 5$ et $V(X_i) = 0,16$. Par indépendance, d'après le théorème central limite, la variable $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu = 100 \times 5 = 500$ et de variance $\sigma^2 = 100 \times 0,16 = 16$. Dit autrement, la variable $\frac{S-500}{\sqrt{16}}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite.

On souhaite calculer

$$P(490 < S < 510) = P\left(\frac{490 - 500}{\sqrt{16}} < \frac{S - 500}{\sqrt{16}} < \frac{510 - 500}{\sqrt{16}}\right) = P\left(-2.5 < \frac{S - 500}{4} < 2.5\right) = \boxed{0,9876}$$

Techniques de tableur

Version web

Ex 6

Calcul de probabilités

OoHk

A l'aide des formules du tableur, calculer :

1. $P(X \leq 1.2)$ pour X suivant une $\mathcal{N}(0, 1)$



```
=LOI.NORMALE.STANDARD(1,2)
```

2. $P(X \leq 102)$ pour X suivant une $\mathcal{N}(120, 4)$



```
=LOI.NORMALE(102;120;4;1)
```

3. la valeur t telle que $P(X \leq t) = 90\%$ pour X suivant une $\mathcal{N}(120, 4)$



```
=LOI.NORMALE.INVERSE.N(0,9;120;4)
```

4. $P(X \geq 40)$ pour X suivant une $\mathcal{N}(50, 3)$



```
=1-LOI.NORMALE(40;50;3;1)
```

5. $P(90 \leq X \leq 120)$ pour X suivant une $\mathcal{N}(100, 15)$



```
=LOI.NORMALE(120;100;15;1)-LOI.NORMALE(90;100;15;1)
```

6. $P(X \geq 5)$ pour X suivant une $\mathcal{E}(1/2)$



```
=1-LOI.EXPONENTIELLE.N(5;0,5;1)
```

7. $P(X = 3)$ et $P(X \geq 2)$ pour X suivant une $\mathcal{P}(1.5)$



```
=LOI.POISSON.N(3;1,5;0) et =1-LOI.POISSON.N(2;1,5;1)
```

8. la valeur t telle que $P(100 - t \leq X \leq 100 + t) = 95\%$ où X suit une $\mathcal{N}(100, 15)$



```
=LOI.NORMALE.INVERSE.N(0,975;0;15)
```

Ex 7

Loi binomiale sur tableur

c5jf

A l'aide des formules du tableur, générer une table de probabilité de la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.4)$ ainsi que les probabilités cumulées. Représenter le résultat obtenu par un diagramme en bâtons. Changer les paramètres de la loi binomiale : les tables et le graphique doivent se mettre à jour automatiquement.



Lien vers le fichier tableur

Ex 8

Simulation et classement sur tableur

HXrf

Simuler 200 fois le tirage au sort d'un élève parmi 13. Représenter graphiquement la répartition des résultats.



Lien vers le fichier tableur

Ex 9

Variable quantitative à classer

t2sS

A partir des données du fichier suivant : ronfle.txt qui résume des relevés effectués lors d'une étude sur le ronflement :

1. Importer les données dans un fichier tableur.
2. Classer la variable «taille» par intervalles de longueur 10 cm.
3. Peut-on dire que les âges sont uniformément représentés dans cette étude ? On pourra justifier la réponse à l'aide d'un histogramme bien choisi.
4. Afficher un graphique représentant la taille en fonction du poids et commenter.
5. Proposer un graphique qui fait apparaître la répartition H/F entre différentes catégories de consommation d'alcool.



Lien vers le fichier tableur

Ex 10

Corrélation entre le poids et la taille

RHhQ

A partir des données du fichier SOCR-HeightWeight.csv et des fonctions du tableur, déterminer tous les indicateurs de position et de dispersion de chaque variable, puis effectuer une analyse graphique et numérique de la corrélation linéaire entre les deux variables. On pourra traduire au préalable les données dans des unités de mesure européennes.