

Loi normale et doctrine militaire



Version web

Ex 1

Dimensionnement des chargements militaires : estimation et correction de continuité

3Df7

Dans l'ATP 3-21.18 (Foot Marches), la Unit Basic Load (UBL) correspond à la quantité standard de munitions qu'un fantassin doit porter avant réapprovisionnement. Les analyses probabilistes peuvent aider à ajuster cette charge en fonction des profils de mission et du taux réel de consommation observé. La Unit Basic Load (UBL) d'un fantassin est fixée à 7 chargeurs de 30 cartouches pour le fusil M4, soit un total de 210 cartouches.

On modélise par une variable aléatoire X le nombre de chargeurs consommés par mission par un fantassin. On suppose que X suit une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Des journaux d'entraînement indiquent qu'environ 20% des missions consomment au plus 2 chargeurs, et qu'environ 30% des missions en consomment (strictement) plus de 4.

1. Estimer μ et σ à partir de ces informations.



Soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les quantiles utiles sont $\Phi^{-1}(0, 20) \approx -0,84$ et $\Phi^{-1}(0, 70) \approx 0,52$. Les hypothèses $P(X \leq 2) = 0,20$ et $P(X \leq 4) = 0,70$ (car 30% consomment plus de 4) donnent :

$$\frac{2-\mu}{\sigma} \approx -0,84, \quad \frac{4-\mu}{\sigma} \approx 0,52.$$

En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{4-2}{\sigma} = 0,52 - (-0,84) = 1,36$, donc $\sigma = \frac{2}{1,36} \approx 1,46$. On en déduit $\mu = 2 + 0,84\sigma \approx 2 + 0,84 \times 1,46 \approx 3,23$.

2. Déterminer le nombre minimal m de chargeurs à emporter pour que $P(X \leq m) \geq 0,95$.



Pour couvrir 95% des situations, on cherche m entier tel que $P(X \leq m) \geq 0,95$. Avec la correction de continuité,

$$P(X \leq m) \approx \Phi\left(\frac{m+0,5-\mu}{\sigma}\right) \geq 0,95 \iff \frac{m+0,5-\mu}{\sigma} \geq z_{0,95} \approx 1,645.$$

Ainsi, $m+0,5 \geq \mu + 1,645\sigma \approx 3,23 + 1,645 \times 1,46 \approx 5,64$, ce qui implique $m \geq 5,14$. Le plus petit entier est donc $m = 6$.

3. Discuter brièvement l'écart éventuel avec une charge « doctrinale » de 7 chargeurs.



La charge « usuelle » souvent citée (7 chargeurs) excède légèrement la valeur calculée (6) et introduit une marge supplémentaire liée aux incertitudes de mission, à l'hétérogénéité des unités et au fait que la consommation réelle n'est pas exactement normale.

Ex 2

Modélisation d'une journée de marche (ATP 3-21.18, Forced Marches)

Ae9K

Donnée (extrait) : « A normal foot march day, under ideal conditions, is 8 hours, for 32 kilometers at a rate of 4 kilometers per hour (kph). Under ideal conditions, maximum distances recommended for forced marches are— 56 kilometers in 24 hours (14 hours of marching in 24 hours). » (ATP 3-21.18, chap. 2 « Forced Marches »)

On modélise la durée journalière de marche effective H (en heures, sur 24 h) par une loi normale $H \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On suppose que la « journée normale » fixe la moyenne $\mu = 8$ h et que la valeur « 14 h » donnée pour 56 km en marche forcée correspond au 95^e percentile de H .

1. Estimer σ (on prendra $z_{0,95} \approx 1,645$).



L'interprétation est que 14 h est le 95^e percentile de H :

$$P(H \leq 14) = 0,95 \iff \frac{14 - \mu}{\sigma} = z_{0,95} \approx 1,645.$$

Avec $\mu = 8$, on obtient $\sigma = \frac{14-8}{1,645} = \frac{6}{1,645} \approx 3,65$ h.

2. La distance journalière D (en km) est liée à H par $D = 4H$ (vitesse 4 km/h). Donner la loi de D et calculer $P(D \geq 40)$.



La variable D suit une loi normale $D \sim \mathcal{N}(4\mu, (4\sigma)^2) = \mathcal{N}(32, (4\sigma)^2)$.

Numériquement, $4\sigma \approx 4 \times 3,65 \approx 14,6$ km. Pour la probabilité, on standardise :

$$P(D \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{40 - 32}{4\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{8}{14,6}\right) \approx P(Z \geq 0,55) \approx 0,292.$$

3. Déterminer le quantile d'ordre 0,90 de D (distance dépassée dans 10% des journées).



On cherche $q_{0,90}(D) = 32 + z_{0,90} \cdot 4\sigma$ avec $z_{0,90} \approx 1,282$:

$$q_{0,90}(D) \approx 32 + 1,282 \times 14,6 \approx 50,7 \text{ km.}$$

4. (Contrôle de cohérence) Avec votre modèle, à quel percentile correspond $H = 12$ h ? Confronter au tableau « 96 km en 48 h (12 h de marche chaque période de 24 h) ».



Pour $H = 12$ h, le score réduit vaut

$$z = \frac{12 - 8}{\sigma} \approx \frac{4}{3,65} \approx 1,10.$$

On a alors $\Phi(z) \approx 0,863$. Donc 12 h correspond à un percentile d'environ 86 %, cohérent avec l'extrait. C'est exigeant mais moins extrême que 14 h.

Ex 3

Charges doctrinales et distribution des masses

Bf3T

★★★★

Données :

- D'après une étude de 2012 menée sur les soldats américains hommes (ANSUR II 2012), leur masse W (en lb) $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 188,55$ et $\sigma = 31,35$.
- Dans le document de doctrine (ATP 3-21.18), on peut lire : *fighting load* $\approx 30\%$ du poids, cible [60, 80] lb ; *approach load* $\approx 45\%$ du poids, cible [80, 100] lb ; *emergency approach* [100, 125] lb (46-70% du poids).

1. (Calage et cohérence) Sous l'hypothèse $L_f = 0,30W$ (fighting load), exprimer la condition « $L_f \in [60, 80]$ lb » en termes de W puis calculer $P(60 \leq L_f \leq 80)$ pour les hommes ANSUR II.



$60 \leq 0,30W \leq 80 \iff 200 \leq W \leq 266,67$. Standardisation : $Z = \frac{W-\mu}{\sigma}$.

$z_1 = \frac{200-188,55}{31,35} \approx 0,37$, $z_2 = \frac{266,67-188,55}{31,35} \approx 2,49$.

$P(60 \leq L_f \leq 80) = \Phi(2,49) - \Phi(0,37) \approx 0,994 - 0,643 \approx 0,35$.

Lecture : environ 35% des soldats (hommes) auront un fighting load (30%) dans la cible 60–80 lb. Par ailleurs, $P(L_f > 80) = P(W > 266,67) \approx 0,006$ (rare), et $P(L_f < 60) \approx 64\%$.

2. Même question pour l'approach load : $L_a = 0,45W$ et cible $[80, 100]$ lb.



$80 \leq 0,45W \leq 100 \iff 177,78 \leq W \leq 222,22$.

$z_1 = \frac{177,78-188,55}{31,35} \approx -0,34$, $z_2 = \frac{222,22-188,55}{31,35} \approx 1,07$.

$P(80 \leq L_a \leq 100) = \Phi(1,07) - \Phi(-0,34) \approx 0,858 - 0,367 \approx 0,49$.

Lecture : près de 49% tomberont naturellement dans la cible 80–100 lb avec la règle des 45%.

3. Pour l'emergency (on prendra la valeur nominale $L_e = 0,60W$), calculer $P(100 \leq L_e \leq 125)$.



$100 \leq 0,60W \leq 125 \iff 166,67 \leq W \leq 208,33$.

$z_1 = \frac{166,67-188,55}{31,35} \approx -0,70$, $z_2 = \frac{208,33-188,55}{31,35} \approx 0,63$.

$P(100 \leq L_e \leq 125) = \Phi(0,63) - \Phi(-0,70) \approx 0,736 - 0,243 \approx 0,49$.

4. Interpréter : parmi les soldats (hommes) ANSUR II, quelle part est naturellement en-dessous/au-dessus des fourchettes doctrinales si l'on respecte strictement les pourcentages 30/45/60% ?



Synthèse. - Avec une application stricte des % doctrinaux (30/45/60%), les intervalles cibles en lb ne sont « centrés » que pour une fraction de la population : $\approx 35\%$ (fighting), $\approx 49\%$ (approach), $\approx 49\%$ (emergency nominal). Il en résulte qu'un commandement qui imposerait simultanément la règle % et la fourchette en lb constaterait : beaucoup de soldats avec $L_f < 60$ lb (trop léger vs fourchette) et très peu au-dessus de 80 lb si on respecte 30%.

5. (Quantile) Quel est le 95e percentile du fighting load L_f ?



$L_f \sim \mathcal{N}(0,30\mu, (0,30\sigma)^2) = \mathcal{N}(56,57, 9,41^2)$ (lb). Donc $q_{0,95}(L_f) = 56,57 + 1,645 \times 9,41 \approx 71,1$ lb.

Lecture : 95% des soldats auraient un fighting load (30%) ≤ 71 lb, bien à l'intérieur de la cible 60–80 lb.

Ex 4

Vitesse de marche en cross-country et charge

C7xP

★ ★ ★ ★

[Extraits] La vitesse moyenne de marche soutenable d'un soldat à pied, de jour, sur route ou sur terrain amélioré, est de 4 kilomètres par heure (km/h). En terrain varié (cross-country),

cette vitesse est de 2,4 km/h avec une charge de 40 livres (soit 18 kg) ou moins. [...] Pour chaque tranche de 10 livres (soit environ 4,5 kg) transportée au-delà de 40 livres, la distance moyenne parcourue par les soldats diminue d'environ 2 kilomètres toutes les 6 heures.

On modélise la vitesse de marche journalière en terrain cross-country, de jour, notée V (en km/h), par une loi normale dont la moyenne μ_W dépend de la charge W du soldat. On suppose que l'écart-type de cette variable aléatoire V est constante, égale à $\sigma = 0,40$ km/h. Ainsi, $V \sim \mathcal{N}(\mu_W, \sigma^2)$. Le manuel donne une moyenne « idéale » de $\mu_{40} = 2,4$ km/h lorsque le soldat a une charge de 40 livres (ou moins).

1. Afin de déduire la perte de vitesse par tranche de 10 lb de poids porté, exprimer la vitesse associée au parcours d'une distance de 2 km en 6 h. En déduire que l'expression de la valeur moyenne μ_W (en km/h) d'un soldat portant une charge de W lb d'au moins 40 lb, en référence à l'extrait de doctrine précédent, est :

$$\mu_W = 2,4 - 0,333 \frac{W - 40}{10}$$



Une perte de 2 km en 6 h correspond à une perte de vitesse de $\Delta v = \frac{2}{6} \approx 0,333$ km/h. Cette perte s'applique pour chaque tranche de 10 lb au-delà de 40 lb. L'expression de la moyenne est donc :

$$\mu_W = 2,4 - 0,333 \times \frac{W - 40}{10} = 2,4 - 0,0333(W - 40), \quad \text{pour } W \geq 40.$$

2. (Calage de la moyenne) Calculer μ_W pour des charges de 40, 60 et 80 livres.



$$\mu_{40} = 2,4 \text{ km/h.}$$

$$\mu_{60} = 2,4 - 0,333 \times 2 \approx 1,734 \text{ km/h.}$$

$$\mu_{80} = 2,4 - 0,333 \times 4 \approx 1,068 \text{ km/h.}$$

3. (Probabilité d'atteindre l'objectif) Pour une charge de 60 livres, déterminer la probabilité $P(D \geq 12)$ que les soldats parcourent au moins $D = 12$ km en $T = 8$ h. Avec les mêmes données, calculer ensuite $P(D \geq 16)$.



La distance $D = T \times V = 8V$. Donc $D \sim \mathcal{N}(8\mu_{60}, (8\sigma)^2) = \mathcal{N}(13,87, 3,2^2)$.

$$P(D \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12 - 13,87}{3,2}\right) = P(Z \geq -0,585) \approx 0,72.$$

$$P(D \geq 16) = P\left(Z \geq \frac{16 - 13,87}{3,2}\right) = P(Z \geq 0,665) \approx 0,25.$$

Ainsi, la probabilité de parcourir 12 km est d'environ 72%, mais elle tombe à 25% pour 16 km.

4. (Distance « assurée » à 95%) Pour les charges de $W = 40, 60$ et 80 lb, calculer les distances $d_{0,95}(W)$ telles que les soldats aient 95% de chance de les parcourir en 8 h.



On cherche d tel que $P(D \geq d) = 0,95$. Cela revient à $P(V \geq d/8) = 0,95$. Il faut donc $d/8 = \mu_W + z_{0,05}\sigma = \mu_W - z_{0,95}\sigma$. Avec $z_{0,95} \approx 1,645$: $d_{0,95}(W) = 8(\mu_W - 1,645 \times 0,40) = 8(\mu_W - 0,658)$.

$$\text{--- } W = 40 : d_{0,95}(40) = 8(2,4 - 0,658) = 13,9 \text{ km.}$$

$$\text{--- } W = 60 : d_{0,95}(60) = 8(1,734 - 0,658) = 8,6 \text{ km.}$$

$$\text{--- } W = 80 : d_{0,95}(80) = 8(1,068 - 0,658) = 3,3 \text{ km.}$$

5. (Faisabilité d'un objectif) Existe-t-il une charge W permettant d'assurer une probabilité

de 90% de réussir à couvrir 20 km en 8 h ? Justifier.



On cherche W tel que $P(D \geq 20) \geq 0,90$. Cela revient à $P(V \geq 20/8 = 2,5) \geq 0,90$. Il faut donc $\mu_W \geq 2,5 + z_{0,90}\sigma = 2,5 + 1,282 \times 0,40 \approx 3,013$ km/h. Or $\mu_W \leq 2,4$, donc cet objectif est irréalisable.

6. (Faisabilité d'un objectif 2) Même question mais pour parcourir 10 km en 8 h.



On cherche W tel que $P(D \geq 10) \geq 0,90$. Cela revient à $P(V \geq 10/8 = 1,25) \geq 0,90$. Il faut donc $\mu_W \geq 1,25 + 1,282 \times 0,40 \approx 1,763$ km/h.

$$2,4 - 0,0333(W - 40) \geq 1,763 \implies W - 40 \leq 19,1 \implies W \leq 59,1.$$

Pour assurer 90% de chance de marcher 10 km en 8 h, la charge doit rester inférieure à environ 59 lb.