

# Inégalités et théorèmes limite



Version web

Ex 1

## Inégalités et loi de Poisson

4Idt

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{2}$ .
2. Montrer que  $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$  et en déduire que  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ .
3. Pour  $\lambda$  assez grand, laquelle des deux inégalités est la meilleure ?

Ex 2

## Logistique d'un dépôt

3DyT

★ ★

Un dépôt de ravitaillement reçoit chaque jour un certain nombre de camions de livraison. Ce nombre est modélisé par une variable aléatoire d'espérance 100 et d'écart-type 8. On souhaite estimer le risque qu'un jour le dépôt reçoive trop peu de camions pour maintenir ses stocks. Donner un majorant de la probabilité qu'un jour, il arrive au plus 60 camions.

Ex 3

## Estimation par inégalité

ptxH

On sait qu'une personne sur cent est dyslexique. Lors des journées "citoyens", on détecte ce problème. Sur  $n$  jeunes examinés, on note  $Y_n$  la proportion de dyslexiques.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $Y_n$  : on introduira la variable  $X_n$  comptant le nombre de dyslexiques parmi les  $n$  jeunes.
2. Trouver un entier  $n$  tel que la probabilité que  $0.009 \leq Y_n \leq 0.011$  soit supérieure à 0.9.

Ex 4

## Estimation par inégalité

ZMBI

On sait qu'il y a à peu près une chance sur deux d'avoir une fille à chaque naissance, mais on veut avoir une estimation plus précise de cette probabilité  $p$ .

On regarde ce qui se passe sur  $n$  naissances, et on appelle  $S_n$  le nombre de filles parmi les  $n$  naissances.

1. Que vaut la variable  $Y_n$  égale à la proportion de filles dans les naissances ? Donner son espérance et sa variance.
2. Soit  $a > 0$ . Montrer que  $P(|Y_n - p| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2}$ .
3. Déterminer un nombre  $n$  d'observations à faire pour que l'on puisse déduire de  $Y_n$ , avec

moins de 1% de chances de se tromper, que  $Y_n - 0.01 \leq p \leq Y_n + 0.01$ .

4. Parmi 250 000 naissances, combien faut-il, au minimum, observer de naissances de filles pour conclure avec 99% de chances de ne pas se tromper, qu'il naît plus de filles que de garçons ?

Ex 5

## Fréquence d'arrivées logistiques

V44u

\*\*\*

L'observation a permis d'affirmer que le nombre de camions de ravitaillement arrivant à un poste logistique entre 9h00 et 10h30 suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 16$ . On donne ci-dessous un extrait de la table de répartition :

| $k$           | 14     | 15     | 16     | 17     | 18     |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $P(X \leq k)$ | 0.3675 | 0.4667 | 0.5660 | 0.6593 | 0.7423 |

- En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer  $P(X = 15)$ .
  - Déterminer les paramètres de la loi normale que suit la variable aléatoire  $Y$  qui approche  $X$ .
  - Calculer  $\alpha = P(14.5 \leq Y \leq 15.5)$ . Quel est le lien entre  $\alpha$  et  $P(X = 15)$  ?
- Déterminer une approximation de  $P(15 \leq X \leq 20)$ . Interpréter le résultat dans le contexte.

Ex 6

## Approximation par une loi normale

1fDE

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion  $p = 0.05$  est fautive et sur des pièces de deux euros dont une proportion  $p' = 0.02$  est fautive. On considère un lot de 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de deux euros.

- On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fautive ?
- Sachant que cette pièce est fautive, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?
- On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces fautes parmi les 1000.  
Quelle est la loi de  $X$  ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?  
En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, donner une approximation de la probabilité pour que  $X$  soit compris entre 48 et 52.

Ex 7

## Deux approximations

Ajfy

Une machine produit des rondelles métalliques en grande série. Une rondelle est acceptée si son diamètre extérieur est compris entre 21.9 et 22.1 mm. On suppose que sur l'ensemble de la production, le diamètre extérieur des rondelles est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale de moyenne 22 mm et d'écart-type 0.05 mm.

1. Quelle est la probabilité  $p$  qu'une pièce soit refusée ?
2. On prélève 100 pièces. En utilisant une approximation par la loi de Poisson, donner une approximation de la probabilité qu'il y ait  $k$  rondelles refusées, pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
3. On prélève 1000 pièces. Proposer une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins 50 pièces refusées.

**Ex 8****Réseau de transmissions**

eaDW

★ ★ ★

Un poste de commandement dessert 5000 terminaux de communication (véhicules, unités mobiles, postes radio). À un instant donné, chaque terminal a une probabilité égale à 0.20 d'être en communication active. Les comportements des terminaux sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de terminaux simultanément en communication à un instant  $t$ . Quelle est la loi de  $X$  ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?
2. On pose  $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$ . Justifier précisément que l'on peut approcher la loi de  $Y$  par la loi normale centrée réduite.
3. Le poste de commandement souhaite dimensionner son réseau pour que la probabilité de saturation (trop de communications simultanées) soit inférieure à 2.5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée du nombre maximal de connexions que le système doit pouvoir gérer.