



Inégalités et théorèmes limite

Version web

Ex 1

Inégalités et loi de Poisson

4Idt

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{2}$.



Par l'inégalité de Markov, on a :

$$P(|X| \geq 2\lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{2\lambda}$$

or $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on a

$$P(X \leq 2\lambda) \geq \frac{\mathbb{E}(X)}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ et en déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.



Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

donc

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Or

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda},$$

d'où

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3. Pour λ assez grand, laquelle des deux inégalités est la meilleure ?



Pour $\lambda \geq 2$, $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est meilleure que celle de Markov.

Ex 2

Logistique d'un dépôt

3DyT

★ ★

Un dépôt de ravitaillement reçoit chaque jour un certain nombre de camions de livraison. Ce nombre est modélisé par une variable aléatoire d'espérance 100 et d'écart-type 8. On souhaite estimer le risque qu'un jour le dépôt reçoive trop peu de camions pour maintenir ses stocks. Donner un majorant de la probabilité qu'un jour, il arrive au plus 60 camions.



Soit X le nombre de camions arrivant au dépôt dans une journée. On sait que $\mathbb{E}(X) = 100$ et $\sigma(X) = 8$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq 60) &= P(X - 100 \leq -40) \\ &\leq P(|X - 100| \geq 40) \\ &\leq \frac{\sigma^2(X)}{40^2} = \frac{8^2}{40^2} = \frac{1}{25} = 0.04. \end{aligned}$$

Il y a donc au plus 4% de chances qu'un jour le dépôt reçoive moins de 60 camions, ce qui permet de quantifier un risque logistique faible mais non négligeable.

Ex 3

Estimation par inégalité

ptxH

On sait qu'une personne sur cent est dyslexique. Lors des journées "citoyens", on détecte ce problème. Sur n jeunes examinés, on note Y_n la proportion de dyslexiques.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n : on introduira la variable X_n comptant le nombre de dyslexiques parmi les n jeunes.



On a $X_n \sim \mathcal{B}(n, 0.01)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = 0.01 \times n$ et $\sigma^2(X_n) = 0.01 \times 0.09 \times n$. Comme $Y_n = \frac{X_n}{n}$ donc $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_n) = 0.01$ et $\sigma^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sigma^2(X_n) = \frac{0.0099}{n}$.

2. Trouver un entier n tel que la probabilité que $0.009 \leq Y_n \leq 0.011$ soit supérieure à 0.9.



On cherche n tel que $P(0.009 \leq Y_n \leq 0.011) \geq 0.9$. On a

$$\begin{aligned} P(0.009 \leq Y_n \leq 0.011) &= P(-0.001 \leq Y_n - 0.01 \leq 0.001) \\ &= P(|Y_n - 0.01| \leq 0.001) \\ &= 1 - P(|Y_n - 0.01| \geq 0.001). \end{aligned}$$

On cherche donc n tel que

$$P(|Y_n - 0.01| \geq 0.001) \leq 0.1.$$

Or par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|Y_n - 0.01| \geq 0.001) \leq \frac{\sigma^2(Y_n)}{(0.001)^2} = \frac{9900}{n}.$$

Si on impose que

$$\frac{9900}{n} \leq 0.10,$$

on obtient bien $P(|Y_n - 0.01| \geq 0.001) \leq 0.1$. Il faut donc que

$$n \geq \frac{9900}{0.1} = 99\,000.$$

On en conclut qu'il faut au moins examinés 99 000 jeunes pour avoir, dans 90% des cas, une proportion de dyslexiques comprise entre 0.9% et 1.1%.

Ex 4

Estimation par inégalité

ZMBI

On sait qu'il y a à peu près une chance sur deux d'avoir une fille à chaque naissance, mais on veut avoir une estimation plus précise de cette probabilité p .

On regarde ce qui se passe sur n naissances, et on appelle S_n le nombre de filles parmi les n naissances.

1. Que vaut la variable Y_n égale à la proportion de filles dans les naissances ? Donner son espérance et sa variance.



$Y_n = \frac{S_n}{n}$, où S_n est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On a donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times np = p \text{ et } \sigma^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sigma^2(S_n) = \frac{1}{n^2} \times np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

2. Soit $a > 0$. Montrer que $P(|Y_n - p| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2}$.



Soit $a > 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n :

$$P(|Y_n - p| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(Y_n)}{a^2} = \frac{p(1-p)}{a^2 n} \leq \frac{1}{4na^2},$$

en utilisant l'indication donnée dans l'énoncé.

3. Déterminer un nombre n d'observations à faire pour que l'on puisse déduire de Y_n , avec moins de 1% de chances de se tromper, que $Y_n - 0.01 \leq p \leq Y_n + 0.01$.



On souhaite avoir $P(Y_n - 0.01 \leq p \leq Y_n + 0.01) \geq 0.99$. Or

$$\begin{aligned} P(Y_n - 0.01 \leq p \leq Y_n + 0.01) &= P(-0.01 \leq p - Y_n \leq 0.01) = P(|Y_n - p| \leq 0.01) \\ &= 1 - P(|Y_n - p| \geq 0.01) \end{aligned}$$

On souhaite donc avoir $P(|Y_n - p| \geq 0.01) \leq 0.01$. Or par la question 2., avec $a = 0.01$, on a l'inégalité :

$$P(|Y_n - p| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(Y_n)}{a^2} \leq \frac{1}{4n \times (0.01)^2}.$$

On prend donc n tel que $\frac{1}{4n \times (0.01)^2} \leq 0.01$, c'est-à-dire $n \geq 250\,000$.

4. Parmi 250 000 naissances, combien faut-il, au minimum, observer de naissances de filles pour conclure avec 99% de chances de ne pas se tromper, qu'il naît plus de filles que de garçons ?



Par la question 3., on sait que $P(p \in [Y_n - 0.01; Y_n + 0.01]) \geq 0.99$.

Soit X_0 le nombre de filles observées. Avec moins de 1% de chances de se tromper, on veut que $p > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{X_0}{n} - 0.01 > \frac{1}{2}$, donc $X_0 > 125\,250$.

Il faut donc observer au minimum 500 filles de plus que de garçons pour être sûr à 99% qu'il y a plus de filles que de garçons.

Ex 5

Fréquence d'arrivées logistiques

V44u

L'observation a permis d'affirmer que le nombre de camions de ravitaillement arrivant à un poste logistique entre 9h00 et 10h30 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 16$. On donne ci-dessous un extrait de la table de répartition :

k	14	15	16	17	18
$P(X \leq k)$	0.3675	0.4667	0.5660	0.6593	0.7423

1. (a) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer $P(X = 15)$.



$$P(X = 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = 0.4667 - 0.3675 \simeq 0.0992.$$

Il y a donc environ 9.9% de chance que le poste reçoive exactement 15 camions durant cette période.

- (b) Déterminer les paramètres de la loi normale que suit la variable aléatoire Y qui approche X .



La variable X peut être approchée par Y qui suit la loi normale :

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu = 16, \sigma^2 = 16).$$

- (c) Calculer $\alpha = P(14.5 \leq Y \leq 15.5)$. Quel est le lien entre α et $P(X = 15)$?



$$\begin{aligned} \alpha &= P(14.5 \leq Y \leq 15.5) = P\left(\frac{-1.5}{4} \leq \frac{Y - 16}{4} \leq \frac{-0.5}{4}\right) \\ &= P(-0.375 \leq Z \leq -0.125) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= P(0.125 \leq Z \leq 0.375) \\ &= P(Z \leq 0.375) - P(Z \leq 0.125) \\ &= 0.64615 - 0.54975 = 0.0964. \end{aligned}$$

α est une approximation (avec correction de continuité) de $P(X = 15)$, soit environ 9.6%.

2. Déterminer une approximation de $P(15 \leq X \leq 20)$. Interpréter le résultat dans le contexte.



$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 20) &\simeq P(14.5 \leq Y \leq 20.5) \\ &= P\left(-0.375 \leq \frac{Y - 16}{4} \leq 1.125\right) \\ &= P(Z \leq 1.125) - P(Z \leq -0.375) \\ &= 0.8697 - (1 - 0.64615) \\ &= 0.8697 - 0.35385 = 0.51585. \end{aligned}$$

Il y a donc environ 51.6% de chance que le nombre de camions arrivant entre 9h00 et 10h30 soit compris entre 15 et 20. Cela permet au responsable logistique de dimensionner la zone de déchargement pour un trafic médian.

Ex 6

Approximation par une loi normale

1fDE

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0.05$ est fautive et sur des pièces de deux euros dont une proportion $p' = 0.02$ est fautive. On considère un lot de 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de deux euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fautive ?



On peut utiliser un arbre de probabilité pour modéliser la situation. En notant F l'événement "obtenir une pièce fautive" et A (resp. B) l'événement "obtenir une pièce de un euro (resp. deux euros)", on a

$$P(F) = P(F \cap A) + P(F \cap B) = P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) = \frac{150}{500} \times 0.05 + \frac{350}{500} \times 0.02 = 0.029.$$

On a environ 2.9% d'avoir une pièce fautive.

2. Sachant que cette pièce est fautive, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?



On calcule :

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)P(F|A)}{P(F)} = \frac{\frac{150}{500} \times 0.05}{0.029} = 0.5172.$$

3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces fautes parmi les 1000.

Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?

En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, donner une approximation de la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.



On a : $X \sim \mathcal{B}(1000, 0.05)$, $E(X) = 1000 \times 0.05 = 50$ et $\sigma^2(X) = 1000 \times 0.05 \times 0.95 = 47.5$.

La variable aléatoire X peut être approchée (avec correction de continuité) par la variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(50, \sigma^2 = 47.5)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P(48 \leq X \leq 52) &= P(47.5 \leq X \leq 52.5) \\ &\simeq P(47.5 \leq Y \leq 52.5) \\ &\simeq P(-0.36 \leq Z \leq 0.36) \quad \text{avec } Z = \frac{Y - 50}{\sqrt{47.5}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\simeq 2P(Z \leq 0.36) - 1 \\ &\simeq 2 \times 0.6406 - 1 \\ &1 \simeq 0.2812 \end{aligned}$$

Ex 7

Deux approximations

Ajfy

Une machine produit des rondelles métalliques en grande série. Une rondelle est acceptée si son diamètre extérieur est compris entre 21.9 et 22.1 mm. On suppose que sur l'ensemble de la production, le diamètre extérieur des rondelles est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 22 mm et d'écart-type 0.05 mm.

1. Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit refusée ?



On calcule la probabilité qu'une pièce soit acceptée

$$P(21.9 \leq X \leq 22.1) = P(-2 \leq \frac{X-22}{0.05} \leq 2) = 2P(\frac{X-22}{0.05} \leq 2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544.$$

Ainsi, la probabilité qu'une pièce soit refusée est $p = 1 - 0.9544 = 0.0456$.

2. On prélève 100 pièces. En utilisant une approximation par la loi de Poisson, donner une approximation de la probabilité qu'il y ait k rondelles refusées, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.



Soit Y le nombre de rondelles refusées sur les 100 pièces. On a $Y \sim \mathcal{B}(100, p)$ et $\mathbb{E}(Y) = 100 \times p = 4.56$ donc Y peut être approchée par la variable aléatoire Z de loi $\mathcal{P}(4.56)$. Ainsi,

$$\forall k \in \{0, \dots, 4\}, \quad P(Y = k) \simeq P(Z = k) = \frac{4.56^k}{k!} e^{-4.56}.$$

Les résultats demandés sont dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	0.0105	0.0477	0.1088	0.1653	0.1885

3. On prélève 1000 pièces. Proposer une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins 50 pièces refusées.



Soit R le nombre de pièces refusées parmi les 1000 pièces. Alors $Z \sim \mathcal{B}(1000, p)$ qui peut être approchée par une loi Normale :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 50) &\simeq P(Z \geq 49.5) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(45.6, \sigma^2 = 43.52) \\ &\simeq P\left(\frac{Z - 45.6}{\sqrt{43.52}} \geq 0.59\right) \\ &\simeq 1 - P\left(\frac{Z - 45.6}{\sqrt{43.52}} \leq 0.59\right) \\ &\simeq 1 - 0.7224 \\ &\simeq 0.2776 \end{aligned}$$

Il y a donc environ 27.76% de chances d'avoir au moins 50 pièces refusées dans le lot de 1000 pièces.

Ex 8

Réseau de transmissions

eaDW

Un poste de commandement dessert 5000 terminaux de communication (véhicules, unités mobiles, postes radio). À un instant donné, chaque terminal a une probabilité égale à 0.20 d'être en communication active. Les comportements des terminaux sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de terminaux simultanément en communication à un instant t . Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?



$X \sim \mathcal{B}(5000, 0.2)$, donc $\mathbb{E}(X) = 1000$ et $\sigma^2(X) = 800$.

2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément que l'on peut approcher la loi de Y par la loi normale centrée réduite.



Puisque n est grand ($n = 5000$) et $p = 0.2$ n'est ni trop proche de 0 ni de 1, la loi binomiale peut être approchée par une loi normale :

$$X \approx \mathcal{N}(1000, \sigma = \sqrt{800}).$$

En centrant et réduisant, on obtient que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3. Le poste de commandement souhaite dimensionner son réseau pour que la probabilité de saturation (trop de communications simultanées) soit inférieure à 2.5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée du nombre maximal de connexions que le système doit pouvoir gérer.



Soit n le nombre maximal de connexions simultanées supportées. On cherche n tel que $P(X \geq n) \leq 0.025$, soit :

$$P\left(Y \geq \frac{n-1000}{\sqrt{800}}\right) \leq 0.025,$$

c'est-à-dire encore :

$$P\left(Y \leq \frac{n-1000}{\sqrt{800}}\right) \geq 0.975.$$

D'après la table de la loi normale centrée réduite, on a $z_{0.975} \simeq 1.96$, d'où :

$$\frac{n-1000}{\sqrt{800}} \simeq 1.96, \quad \text{soit} \quad n \simeq 1055.44.$$

Le réseau doit donc pouvoir gérer au minimum 1056 connexions simultanées pour que la probabilité de saturation soit inférieure à 2.5%.