

Variables aléatoires absolument continues



Version web

Ex 1

Calcul de probabilité

51mL

★

Soit une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

i

Vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout x réel et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

2. Écrire f à l'aide d'une fonction indicatrice $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.

i

Prendre l'indicatrice de l'ensemble sur lequel la fonction f n'est pas nulle et multiplier par la valeur souhaitée (ici $2x$).

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité. Calculer $P(X \leq \frac{1}{2})$ et $P(-1 \leq X \leq 0.2)$.

Ex 2

Fonction de répartition

gsn9

★ ★

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f définit bien une fonction densité, puis déterminer la fonction de répartition F_X de X .

i

On revient à la définition : on pose $t \in \mathbb{R}$ quelconque et on calcule $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.

2. Exprimer $P(-1 \leq X \leq 1)$ en fonction de F_X et en déduire une valeur numérique.

i

Le résultat dépend de λ qui est le paramètre de cette loi.

Ex 3

Propriété des fonctions de répartition

M00y

★ ★ ★

Soit la fonction F définie pour tout x réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions sur les réels a et b de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X .

i

On ne demande pas ici que X soit une variable aléatoire à densité. Il faut donc trouver des conditions pour que les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F soient correctes, que F soit croissante sur $\mathbb{R}$ et continue à droite.

2. À quelles conditions cette fonction F définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?

i

Il faut ajouter une condition supplémentaire : F doit être continue en tout point de $\mathbb{R}$ et pas seulement continue à droite.

Ex 4

Etude d'une loi de probabilité

j4xc

★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Calculer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue X .

i

Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

2. Déterminer $P(X \leq \frac{1}{3})$ et $P(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3})$.

i

Le deuxième calcul est une probabilité conditionnelle : appliquer la formule de Bayes.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

i

On applique la définition pour calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour le calcul de $V(X)$, on calcule dans un premier temps $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert.

Ex 5

Comparaison de probabilités

bPo3

★ ★

Si l'on tire un réel au hasard dans $[0, 1]$, est-il plus probable d'avoir sa racine carrée inférieure à 0.4 ou d'avoir son carré plus grand que 0.7 ?



Modéliser le nombre tiré au hasard par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Ex 6

Temps d'attente

drby

★ ★

Le temps d'attente à une caisse de supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Vérifier que le choix d'un paramètre $\lambda = 0,12$ permet d'avoir environ $P(T \leq 10) = 0,7$. Par la suite, on fixera $\lambda = 0,12$.
2. Calculer $P(T > 5)$ et interpréter.
3. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à la caisse, quelle est la probabilité que son attente totale dépasse 15 minutes ?
4. On suppose que chaque caisse fonctionne manière indépendante. Etant donné que 6 caisses sont ouvertes, on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes. Quelle est la loi suivie par la variable Y ? Calculer la probabilité qu'au moins 4 des 6 caisses imposent une durée d'attente supérieure à 10 minutes, ce qui obligerait le magasin à ouvrir une nouvelle caisse.

Ex 7

Changement de variable aléatoire

JvYK

★ ★

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. Soit la variable aléatoire $Y = -2\ln(1 - X)$. On note F_X , respectivement F_Y , la fonction de répartition de la variable X , respectivement Y .

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $F_Y(t)$ en fonction de F_X .
2. En déduire la loi suivie par $Y = -2\ln(1 - X)$?

Ex 8

File d'attente

XZIP

★ ★

i

Dans les calculs, on pourra utiliser une intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

ou bien se souvenir que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f_T définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner une densité f_X de X , son espérance et sa variance.
- (b) Vérifier que f_T est bien une densité de probabilité. Déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.
2. (a) Démontrer que la fonction de répartition de T , notée F_T , est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité, est égale à $\frac{2e-3}{2e}$.
3. Un jour donné, trois clients A , B et C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant aux temps de passage en caisse de A et de B sont indépendantes.
- (a) Soit M la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C . Exprimer l'événement $\{M > x\}$ en fonction des événements $\{T_A > x\}$ et $\{T_B > x\}$.
- (b) En déduire une expression de la fonction de répartition F_M de M , en fonction de F_{T_A} et F_{T_B} .
- (c) Déterminer explicitement une densité de M .

Ex 9

Probabilité d'un maximum

1LJ3

★ ★ ★

On considère X_1 , X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2a]$, dont la densité est donc :

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } 0 \leq t < 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note F_X la fonction de répartition de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $V(X_i)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ sans déterminer la loi de Y .

2. On pose $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$. Justifier que la fonction de répartition F_Z de Z vérifie :

$$F_Z(t) = \prod_{i=1}^3 F_{X_i}(t). \text{ En déduire qu'une densité de } Z \text{ est :}$$

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{3}{(2a)^3} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$. Soit la variable aléatoire $T = \alpha Z$. Déterminer α de sorte que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y)$.
4. Comparer $V(T)$ et $V(Y)$.

Ex 10

Loi normale, calculs numériques

qoul

★

1. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(-1.2 \leq Z \leq 1.1)$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(70 \leq QI \leq 130)$ où QI suit une loi $\mathcal{N}(100, \sigma = 15)$.
3. A l'aide des tables de valeurs, déterminer un réel t tel que $P(|X - 5| < t) = 95\%$ où X suit une loi $\mathcal{N}(5, \sigma = 1)$.

Ex 11

Calculs avec une loi normale

uPmr

★★

On suppose que la température (en degré Celsius) dans la ville de Rennes au mois de janvier est une variable aléatoire T qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Déterminer μ lorsque $P(T > 2) = 0.33$.

i

Centrer et réduire la variable, puis utiliser une lecture inverse de la table de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

2. Pour la valeur de μ ainsi obtenue, déterminer $P(T \leq 0)$.

Ex 12

Calculs avec une loi normale

6er6

★★

La demande d'un produit au cours d'une saison suit sensiblement la loi normale de moyenne 5000 et d'écart-type 1000.

Quel niveau de stock doit-on maintenir en début de saison pour que la demande soit satisfaite dans 90% des cas ?



Définir la variable aléatoire X égale au nombre de produits demandés au cours d'une saison. Justifier que l'on cherche α le niveau de stock en début de saison tel que $P(X \leq \alpha) = 0,9$.

Ex 13

Comparaison de lois normales

32ec

Deux joueurs A et B sont en concurrence au lancer de poids. Un observateur attentif a relevé qu'à l'entraînement, le joueur A a effectué 97.7% de ses lancers au delà de 19 mètres, et 84% en deçà de 22 mètres. Il a aussi noté que de son côté, le joueur B a effectué 74.5% de ses lancers au delà de 19 mètres et 90.8% en deçà de 22 mètres.

1. Déterminer les paramètres des variables aléatoires normales X et Y respectivement égales au lancer du joueur A et au lancer du joueur B .
2. Quels sont les paramètres de la variable aléatoire normale $Z = X - Y$?
3. Exprimer en utilisant la variable aléatoire Z l'événement "Le joueur A gagne le concours." et en déterminer la probabilité.

Ex 14

Comparaison de lois normales

LnaN

La note obtenue par des étudiants à un examen suit une variable aléatoire X de loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10 et la note en dessous de laquelle se trouvent 10% des étudiants.
2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Y = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50% et 7.



Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$, ce qui permet ensuite de centrer et réduire la variable aléatoire Y .