

Variables aléatoires absolument continues



Version web

Ex 1

Calcul de probabilité

51mL

★

Soit une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.



(a) f est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$.

Donc f est une densité de probabilité.

2. Écrire f à l'aide d'une fonction indicatrice $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.



$f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0;1]}(x)$.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité. Calculer $P(X \leq \frac{1}{2})$ et $P(-1 \leq X \leq 0.2)$.



$$\begin{aligned} P(X \leq \frac{1}{2}) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx \\ &= [x^2]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 0.2) &= \int_{-1}^{0.2} f(x)dx \\ &= \int_0^{0.2} 2x dx \\ &= [x^2]_0^{0.2} \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

Ex 2

Fonction de répartition

gsn9

★ ★

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f définit bien une fonction densité, puis déterminer la fonction de répartition

F_X de X .



Il suffit de vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

On détermine maintenant la fonction de répartition : soit $t \in \mathbb{R}$;

- si $t < 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$;
- si $t \geq 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. Exprimer $P(-1 \leq X \leq 1)$ en fonction de F_X et en déduire une valeur numérique.



$$\begin{aligned}P(-1 \leq X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(-1) \\ &= (1 - e^{-\lambda}) - 0 \\ &= 1 - e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Ex 3

Propriété des fonctions de répartition

M00y

★ ★ ★

Soit la fonction F définie pour tout x réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminer des conditions sur les réels a et b de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X .
- À quelles conditions cette fonction F définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?



Il est nécessaire que $b = 1$ pour que $\lim_{+\infty} F = 1$.

Pour que F soit croissante, il est nécessaire que $a \geq 0$ et $F(0^-) \leq F(0)$ soit $a \leq b - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas, F est bien continue à droite.

Réciproquement, F vérifie toutes les conditions suffisantes pour que F soit une fonction de répartition.

Si on ajoute la condition que $a = \frac{1}{2}$ alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et c'est la fonction de répartition d'une variable absolument continue.

Ex 4

Etude d'une loi de probabilité

j4xc

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Calculer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue X .



Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive sur $\mathbb{R}$ (ce qui est le cas ici) et que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Or

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 \lambda x dx = \left[\frac{\lambda}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{\lambda}{2}$$

donc $\lambda = 2$.

2. Déterminer $P(X \leq \frac{1}{3})$ et $P(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3})$.



$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x) dx = [x^2]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$P\left(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}\right)}{P\left(X > \frac{1}{3}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x dx}{1 - P\left(X \leq \frac{1}{3}\right)} = \frac{[x^2]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.



$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Ex 5

Comparaison de probabilités

bPo3

Si l'on tire un réel au hasard dans $[0, 1]$, est-il plus probable d'avoir sa racine carrée inférieure à 0.4 ou d'avoir son carré plus grand que 0.7 ?



Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ modélisant le réel tiré au hasard dans $[0, 1]$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On souhaite comparer les deux probabilités suivantes :

$$- P(\sqrt{X} \leq 0.4) = P(X \leq 0.4^2) = \int_0^{0.16} dx = 0.16$$

$$- P(X^2 \geq 0.7) = P(X \geq \sqrt{0.7}) = \int_{\sqrt{0.7}}^1 dx = 1 - \sqrt{0.7} \simeq 0.163$$

On en conclut qu'il est plus probable d'avoir son carré plus grand que 0.7 (par rapport à avoir sa racine carrée inférieure à 0.4).

Ex 6

Temps d'attente

drby

★ ★

Le temps d'attente à une caisse de supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Vérifier que le choix d'un paramètre $\lambda = 0,12$ permet d'avoir environ $P(T \leq 10) = 0,7$. Par la suite, on fixera $\lambda = 0,12$.



$$\begin{aligned}
 P(T \leq 10) &= \int_{-\infty}^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{10} \\
 &= 1 - e^{-\lambda \times 10} \\
 &= 1 - e^{-1,2} \\
 &\approx 0,7
 \end{aligned}$$

2. Calculer $P(T > 5)$ et interpréter.



$$\begin{aligned}
 P(T > 5) &= 1 - P(T \leq 5) \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^5 \\
 &= 1 - \left(-e^{-\lambda \times 5} + 1 \right) \\
 &= e^{-\lambda \times 5} \\
 &= e^{-0,12 \times 5} \\
 &= e^{-0,6} \\
 &= 0,5488
 \end{aligned}$$

La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 5 minutes est d'environ 55%.

3. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à la caisse, quelle est la probabilité que son attente totale dépasse 15 minutes ?



$$\begin{aligned}
 P(T > 15 \mid T > 10) &= \frac{P(T > 15 \cap T > 10)}{P(T > 10)} \\
 &= \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda \times 15}}{e^{-\lambda \times 10}} \\
 &= e^{-\lambda \times 5} \\
 &= e^{-0,12 \times 5} \\
 &= e^{-0,6} = P(T > 5) = 0,5488
 \end{aligned}$$

La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 15 minutes sachant qu'il est déjà supérieur à 10 minutes est la même que la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 5 minutes. Cette probabilité est d'environ 55%. Cette propriété est appelée *absence de mémoire* de la loi exponentielle.

4. On suppose que chaque caisse fonctionne manière indépendante. Etant donné que 6 caisses sont ouvertes, on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes. Quelle est la loi suivie par la variable Y ? Calculer la probabilité qu'au moins 4 des 6 caisses imposent une durée d'attente supérieure à 10 minutes, ce qui obligerait le magasin à ouvrir une nouvelle caisse.



On a $Y \sim \mathcal{B}(6, P(T > 10))$ avec $P(T > 10) = e^{-1,2} \approx 0,3012$.
Donc

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 4) &= P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) \\
 &= \binom{6}{4} \times P(T > 10)^4 \times P(T \leq 10)^2 + \binom{6}{5} \times P(T > 10)^5 \times P(T \leq 10)^1 \\
 &\quad + \binom{6}{6} \times P(T > 10)^6 \times P(T \leq 10)^0 \\
 &= \binom{6}{4} \times e^{-1,2 \times 4} \times (1 - e^{-1,2})^2 + \binom{6}{5} \times e^{-1,2 \times 5} \times (1 - e^{-1,2})^1 \\
 &\quad + \binom{6}{6} \times e^{-1,2 \times 6} \times (1 - e^{-1,2})^0 \\
 &\approx 0,07
 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 4 des 6 caisses imposent une durée d'attente supérieure à 10 minutes est d'environ 7%.

Ex 7

Changement de variable aléatoire

JvYX



Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. Soit la variable aléatoire $Y = -2 \ln(1 - X)$. On note F_X , respectivement F_Y , la fonction de répartition de la variable X , respectivement Y .

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $F_Y(t)$ en fonction de F_X .



Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\
 &= P(-2 \ln(1 - X) \leq t) \\
 &= P(\ln(1 - X) \geq -t/2) \\
 &= P(1 - X \geq e^{-t/2}) \\
 &= P(X \leq 1 - e^{-t/2}) \\
 &= F_X(1 - e^{-t/2}).
 \end{aligned}$$

2. En déduire la loi suivie par $Y = -2 \ln(1 - X)$?



Or $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$ donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

De plus, si $t \geq 0$, $1 - e^{-t/2} \in [0; 1[$ et si $t \leq 0$, $1 - e^{-t/2} < 0$.

Par conséquent,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t/2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de reconnaître la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$ donc $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

Ex 8

File d'attente

KZIP

★ ★

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f_T définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner une densité f_X de X , son espérance et sa variance.



$$X \sim \mathcal{E}(1), \quad f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- (b) Vérifier que f_T est bien une densité de probabilité. Déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.



f_T est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f_T(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc f_T est bien une densité de probabilité.

L'espérance de T peut se calculer soit par intégrations par parties, soit en utilisant le rappel :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 2.$$

De même pour la variance de T : $V(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$. Or

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$$

donc $V(T) = 6 - 2^2 = 2$.

2. (a) Démontrer que la fonction de répartition de T , notée F_T , est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Par définition, $F_T(x) = \int_{-\infty}^x f_T(t) dt$ donc si $x < 0$, $F_T(x) = 0$ et si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_0^x t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -x e^{-x} + 0 + [-e^{-t}]_0^x = -x e^{-x} - e^{-x} + e^0 \\ &= 1 - (1+x)e^{-x}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule donnée dans l'énoncé.

- (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité, est égale à $\frac{2e-3}{2e}$.



$$\begin{aligned} P(T \leq 2 | T \geq 1) &= \frac{P(\{T \leq 2\} \cap \{T \geq 1\})}{P(T \geq 1)} = \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T \leq 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2} - 1 + 2e^{-1}}{1 - 1 + 2e^{-1}} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{2e - 3}{2e} \end{aligned}$$

3. Un jour donné, trois clients A , B et C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant aux temps de passage en caisse de A et de B sont indépendantes.

- (a) Soit M la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C . Exprimer l'événement $\{M > x\}$ en fonction des événements $\{T_A > x\}$ et $\{T_B > x\}$.



$$\{M > x\} = \{T_A > x\} \cap \{T_B > x\}$$

- (b) En déduire une expression de la fonction de répartition F_M de M , en fonction de F_{T_A} et F_{T_B} .



Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 F_M(t) &= P(M \leq t) \\
 &= 1 - P(M > t) \\
 &= 1 - P(\{T_A > t\} \cap \{T_B > t\}) \\
 &= 1 - P(T_A > t)P(T_B > t) \quad \text{par indépendance de } T_A \text{ et de } T_B \\
 &= 1 - (1 - P(T_A \leq t))(1 - P(T_B \leq t)) \\
 &= 1 - (1 - F_{T_A}(t))(1 - F_{T_B}(t))
 \end{aligned}$$

(c) Déterminer explicitement une densité de M .



Comme T_A et T_B suivent la même loi que T , on $F_{T_A} = F_{T_B} = F_T$. On obtient donc :

$$F_M(x) = 1 - (1 - F_T(x))^2 = \begin{cases} 1 - (1 + x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Afin d'obtenir la densité de la variable aléatoire M , on dérive sa fonction de répartition en tous les points de continuité de sa densité :

$$\begin{aligned}
 f_M(t) &= \begin{cases} -2(1+x)e^{-2x} + 2(1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2x(1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ex 9

Probabilité d'un maximum

1Lj3

On considère X_1 , X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2a]$, dont la densité est donc :

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } 0 \leq t < 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note F_X la fonction de répartition de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $V(X_i)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ sans déterminer la loi de Y .



Espérance de X_i :

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_0^{2a} \frac{t}{2a} dx t = \left[\frac{1}{4a} t^2 \right]_0^{2a} = \frac{4a}{(2a)^2} = a$$

Variance de X_i :

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a} dx t = \left[\frac{t^3}{6a} \right]_0^{2a} = \frac{6a}{(2a)^3} = \frac{4}{3} a^2$$

$$V(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{4}{3} a^2 - a^2 = \frac{1}{3} a^2$$

Espérance de Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} (\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)) = a$$

Variance de Y :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{9} V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{9} (V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{a^2}{9} \end{aligned}$$

2. On pose $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$. Justifier que la fonction de répartition F_Z de Z vérifie :

$$F_Z(t) = \prod_{i=1}^3 F_{X_i}(t). \text{ En déduire qu'une densité de } Z \text{ est :}$$

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{3}{(2a)^3} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Fonction de répartition de Z :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) &= P(Z \leq t) \\ &= P(\max(X_1, X_2, X_3) \leq t) \\ &= P(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\} \cap \{X_3 \leq t\}) \\ &= P(X_1 \leq t) P(X_2 \leq t) P(X_3 \leq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \prod_{i=1}^3 F_{X_i}(t) \end{aligned}$$

Densité de Z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = F'_Z(t) = 3F_{X_1}(t) \times f_{X_1}(t)$$

or

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in [0; 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 2a \\ 3 \left(\frac{t}{2a} \right)^2 \times \frac{1}{2a} & \text{si } t \in [0; 2a] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 2a \\ \frac{3}{(2a)^3} t^2 & \text{si } t \in [0; 2a] \end{cases} \end{aligned}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$. Soit la variable aléatoire $T = \alpha Z$. Déterminer α de sorte que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y)$.



Espérance de Z :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{2a} \frac{3}{(2a)^3} t^3 \, dx t = \left[\frac{3}{4} \frac{1}{(2a)^3} t^4 \right]_0^{2a} = \frac{3a}{2}$$

Variance de Z :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_0^{2a} \frac{3}{(2a)^3} t^4 \, dx t = \left[\frac{3}{5} \frac{1}{(2a)^3} t^5 \right]_0^{2a} = \frac{12}{5} a^2$$

$$V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{12}{5} a^2 - \frac{9}{4} a^2 = \frac{3}{20} a^2$$

Détermination de α :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow \alpha \mathbb{E}(Z) = a \Leftrightarrow \alpha \frac{3a}{2} = a \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

4. Comparer $V(T)$ et $V(Y)$.



On a

$$V(T) = \sigma^2 \left(\frac{2}{3} Z \right) = \frac{4}{9} V(Z) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{20} a^2 = \frac{a^2}{15}.$$

Comme $V(Y) = \frac{a^2}{9}$, on a $V(T) < V(Y)$.

Ex 10

Loi normale, calculs numériques

qoul



1. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(-1.2 \leq Z \leq 1.1)$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



On exprime la probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée Φ :

$$\begin{aligned} P(-1.2 \leq Z \leq 1.1) &= P(Z \leq 1.1) - P(Z < -1.2) \\ &= P(Z \leq 1.1) - P(Z > 1.2) && \text{par symétrie} \\ &= P(Z \leq 1.1) - (1 - P(Z \leq 1.2)) \\ &= \Phi(1.1) + \Phi(1.2) - 1 \\ &\approx 0,75 \end{aligned}$$

2. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(70 \leq QI \leq 130)$ où QI suit une loi $\mathcal{N}(100, \sigma = 15)$.



On pose $Z = \frac{QI - 100}{15}$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned} P(70 \leq QI \leq 130) &= P\left(\frac{70 - 100}{15} \leq \frac{QI - 100}{15} \leq \frac{130 - 100}{15}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times \Phi(2) - 1 \\ &\approx 0,95 \end{aligned}$$

3. A l'aide des tables de valeurs, déterminer un réel t tel que $P(|X - 5| < t) = 95\%$ où X suit une loi $\mathcal{N}(5, \sigma = 1)$.



On pose $Z = X - 5$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned} P(|X - 5| < t) &= P(-t < X - 5 < t) \\ &= P(-t \leq Z \leq t) \\ &= 2 \times \Phi(t) - 1 \end{aligned}$$

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} P(|X - 5| < t) = 0.95 &\iff 2 \times \Phi(t) - 1 = 0.95 \\ &\iff \Phi(t) = 0.975 \\ &\iff t \approx 1.96 \end{aligned} \quad \text{par lecture inverse de la table}$$

Ex 11

Calculs avec une loi normale

uPmr

★ ★

On suppose que la température (en degré Celsius) dans la ville de Rennes au mois de janvier est une variable aléatoire T qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Déterminer μ lorsque $P(T > 2) = 0.33$.



$$T \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 4)$$

$$\begin{aligned} P(T > 2) = 0.33 &\iff P\left(\frac{T - \mu}{4} > \frac{2 - \mu}{4}\right) = 0.33 \\ &\iff P\left(Z > \frac{2 - \mu}{4}\right) = 0.33 \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\iff P\left(Z \leq \frac{2 - \mu}{4}\right) = 0.67 \end{aligned}$$

donc $\frac{2 - \mu}{4} = 0.44$ par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. D'où $\mu = 0.24$.

2. Pour la valeur de μ ainsi obtenue, déterminer $P(T \leq 0)$.



$$\begin{aligned} P(T \leq 0) &= P\left(\frac{T - \mu}{4} \leq \frac{-\mu}{4}\right) \\ &= P\left(\frac{T - 0.24}{4} \leq -0.06\right) \\ &= P(Z \leq -0.06) \quad \text{en posant } Z = \frac{T - 0.24}{4}, \quad \text{ainsi } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= P(Z \geq 0.06) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.06) \\ &= 1 - 0.5239 \\ &= 0.4761 \end{aligned}$$

Ex 12

Calculs avec une loi normale

6er6

★ ★

La demande d'un produit au cours d'une saison suit sensiblement la loi normale de moyenne 5000 et d'écart-type 1000.

Quel niveau de stock doit-on maintenir en début de saison pour que la demande soit satisfaite dans 90% des cas ?



Soit X le nombre de produits demandés au cours d'une saison. Par l'énoncé, on sait que $X \sim \mathcal{N}(5000, \sigma = 1000)$.

Soit α le niveau de stock en début de saison. On cherche α tel que $P(X \leq \alpha) = 0,9$, ce qui donne :

$$P\left(\frac{X - 5000}{1000} \leq \frac{\alpha - 5000}{1000}\right) = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{\alpha - 5000}{1000}\right) = 0,9, \quad \text{avec } Z = \frac{X - 5000}{1000} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient $\frac{\alpha - 5000}{1000} \simeq 1,29$, c'est-à-dire $\alpha \simeq 6290$.

Le niveau de stock en début de saison doit être de 6290 unités pour satisfaire la demande dans 90% des cas.

Ex 13

Comparaison de lois normales

32ec

★ ★ ★

Deux joueurs A et B sont en concurrence au lancer de poids. Un observateur attentif a relevé qu'à l'entraînement, le joueur A a effectué 97.7% de ses lancers au delà de 19 mètres, et 84% en deça de 22 mètres. Il a aussi noté que de son côté, le joueur B a effectué 74.5% de ses lancers au delà de 19 mètres et 90.8% en deça de 22 mètres.

1. Déterminer les paramètres des variables aléatoires normales X et Y respectivement égales au lancer du joueur A et au lancer du joueur B .



Joueur A :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \quad P(X \geq 19) = 0.977, \quad P(X \leq 22) = 0.84$$

En posant $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$\begin{cases} P\left(Z \geq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.977 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq -\frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.977 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.84 \end{cases}$$

et par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{19 - \mu}{\sigma} = 2 \\ \frac{22 - \mu}{\sigma} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 + \mu = 2\sigma \\ 22 - \mu = \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 21 \\ \sigma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(21, \sigma = 1)$$

Joueur B :

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \quad P(Y \geq 19) = 0.745, \quad P(Y \leq 22) = 0.908$$

En posant $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$, on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$\begin{cases} P\left(Z \geq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.745 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.908 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq -\frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.745 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.908 \end{cases}$$

et par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{19 - \mu}{\sigma} = 0.66 \\ \frac{22 - \mu}{\sigma} = 1.33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 + \mu = 0.66\sigma \\ 22 - \mu = 1.33\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 20 \\ \sigma = 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow Y \sim \mathcal{N}(20, \sigma = 1.5)$$

2. Quels sont les paramètres de la variable aléatoire normale $Z = X - Y$?



Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et de loi Normale, donc leur différence est encore une loi Normale de paramètres :

$$Z \sim \mathcal{N}(21 - 20, \sigma^2 = 1^2 + 1.5^2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad Z \sim \mathcal{N}(21 - 20, \sigma^2 = 3.25).$$

3. Exprimer en utilisant la variable aléatoire Z l'événement "Le joueur A gagne le concours." et en déterminer la probabilité.



Le joueur A gagne le concours signifie que le lancer X du joueur A est supérieur au lancer Y du joueur B, ce qui revient à avoir $Z \geq 0$.

$$P(Z \geq 0) = P\left(\frac{Z - 1}{\sqrt{3.25}} \geq \frac{-1}{\sqrt{3.25}} \simeq 0.55\right) = 0.7088$$

Il y a donc 70.88% de chance que A gagne le concours.

Ex 14

Comparaison de lois normales

LnaN

La note obtenue par des étudiants à un examen suit une variable aléatoire X de loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 3$.



Soit X la note obtenue par un étudiant : $X \sim \mathcal{N}(7, \sigma^2 = 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10 et la note en dessous de laquelle se trouvent 10% des étudiants.



Comme $\frac{X-7}{3} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-7}{3} \geq 1\right) = 1 - P\left(\frac{X-7}{3} \leq 1\right) \simeq 1 - 0.8413 \simeq 0.1587$$

soit environ 15.87% des étudiants ont plus de 10.

On cherche α la note telle que $P(X \leq \alpha) = 0.10$. On note que

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) = 0.1 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \leq \frac{\alpha-7}{3}\right) = 0.1 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \geq \frac{-\alpha+7}{3}\right) = 0.1 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \leq \frac{-\alpha+7}{3}\right) = 0.9, \end{aligned}$$

ce qui donne par lecture de table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $\frac{-\alpha+7}{3} \simeq 1.3$, soit $\alpha \simeq 3.1$. Donc 10% des étudiants ont en-dessous de 3.1.

2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Y = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50% et 7.



On a $Y = aX + b$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= a\mathbb{E}(X) + b = 7a + b \\ V(Y) &= V(aX) = a^2 V(X) = 9a^2. \end{aligned}$$

On souhaite avoir 50% des étudiants ayant plus de 10. Comme la loi normale est symétrique par rapport à sa moyenne, cela revient à prendre $\mathbb{E}(Y) = 10$ donc $10 = 7a + b$.

Ensuite, on souhaite avoir $P(Y \leq 7) = 0.1$. On a

$$P\left(\frac{Y-10}{3a} \leq \frac{7-10}{3a}\right) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-10}{3a} \leq \frac{1}{a}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \simeq 1.29 \Leftrightarrow a \simeq 0.775.$$

Par conséquent, $b = 10 - 7a \simeq 4.573$.