

Variables aléatoires discrètes



Version web

Ex 1

Probabilité d'événements

kJz6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et deux événements A et B . On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les événements complémentaires de A et B .

On dispose des valeurs suivantes :

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{7}{8} \quad , \quad P(\bar{B}) = \frac{3}{8}$$

Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(A \cap B)$;
2. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$;
3. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$;
4. $P(\bar{A} \cup B)$.

Ex 2

Probabilité d'événements

Hhtu

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et trois événements A , B et C tels que :

$$P(A) = 0.3 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.2 \quad , \quad P(C | A \cap B) = 0.5$$

Calculer, si possible, les probabilités suivantes :

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1. $P(A \cup B)$; | 5. $P(B A)$; |
| 2. $P(A B)$; | 6. $P(A \cap B \cap C)$; |
| 3. $P(\bar{A} B)$; | 7. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; |
| 4. $P(A \bar{B})$; | 8. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. |

Ex 3

Fiabilité

YYAZ

Une chaîne de montage d'ordinateurs utilise un lot de composants électroniques contenant 2% d'éléments défectueux. En début de chaîne, chaque composant est vérifié par un testeur dont la fiabilité n'est pas parfaite, de sorte que la probabilité que le testeur déclare un composant en bon état, sachant que le composant est réellement en bon état est de 0,95, et que la probabilité que le testeur déclare un composant en mauvais état, sachant que le composant est réellement en mauvais état est de 0,94.

Quelle est la probabilité qu'un composant déclaré en mauvais état par le testeur soit réellement en mauvais état ?

Ex 4

Probabilité bayésienne

JHnB

★ ★

Un poison vient d'être ingéré par une personne. L'examen des lieux laisse penser que trois poisons p_1 , p_2 et p_3 seulement peuvent être incriminés. Le poison p_1 a une probabilité $\frac{1}{10}$ d'avoir été ingéré, le poison p_2 une probabilité de $\frac{1}{2}$ et le poison p_3 une probabilité de $\frac{2}{5}$.

De plus, on sait que chaque poison provoque chez la personne qui l'a ingéré un signe clinique s particulier, mais avec des probabilités différentes car ils n'ont pas la même composition. Ainsi, le poison p_1 provoque le signe clinique s avec une probabilité de $\frac{4}{5}$. Ce même signe est observable respectivement avec les probabilités $\frac{1}{50}$ pour le poison p_2 et $\frac{2}{5}$ pour le poison p_3 .

Quel est le poison qui a la plus grande probabilité d'avoir été absorbé, sachant que le signe clinique s est observé sur le patient ?

Ex 5

Jeu et suite

f63Q

★ ★ ★

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, il a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner. Pour les parties suivantes, on suppose que :

- s'il a gagné la partie précédente, il a une probabilité de 0.6 de gagner la partie suivante ;
- s'il a perdu la partie précédente, il a une probabilité de 0.7 de perdre la partie suivante.

Soit G_n l'événement « le joueur a gagné la n -ième partie » et on note $u_n = P(G_n)$. On note également $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 , v_2 .
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3v_n$. En déduire une relation matricielle entre $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que la suite de terme général $u_n - \frac{3}{7}$ est une suite géométrique de raison 0.3 et en déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n ainsi que leur limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Ex 6

Loi d'une variable aléatoire discrète

JpRc

★

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$ telle que :

$$P(X < 5) = \frac{1}{6}, \quad P(X > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(X \leq 3) = P(X = 4).$$

Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Ex 7

Dé truqué

Le02

★ ★ ★

On considère un dé truqué cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro obtenu à l'issue d'un lancer.

1. Déterminer la loi de X .



Exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X = 1)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Calculer l'espérance de X .
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.



Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y .

Ex 8

Gain au loto

5sHJ

Le loto est un jeu consistant à choisir six numéros différents compris entre 1 et 49. Au dernier tirage, il fallait jouer les numéros : 4, 8, 21, 23, 42 et 49. Le gain était de 700 000 euros avec les six bons numéros, de 1100 euros avec cinq bons numéros, de 20 euros avec quatre bons numéros et de 1 euro avec trois bons numéros.

Pour un jeu simple, calculer l'espérance de gain.

Ex 9

Identification de lois usuelles

r3ax

★ ★

Pour chacune des situations suivantes, déterminer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance.

1. On lance un dé équilibré 100 fois de suite et on note X le nombre d'apparitions du chiffre « 2 ».
2. Deux personnes lancent chacune une pièce équilibrée. On dit que l'expérience est un succès si elles obtiennent toutes les deux « face ».
 - (a) Ces personnes répètent l'expérience 8 fois. On note X le nombre de succès.
 - (b) Ces personnes répètent l'expérience jusqu'à ce qu'elles obtiennent un succès. On note X le nombre de lancers.
3. Une agence de location de voitures propose à ses clients 3 catégories de voitures : A , B et C . Elle a constaté que dans une journée, 40% des demandes sont pour A , 50% des demandes sont pour B , 10% des demandes sont pour C . Les demandes de location sont supposées indépendantes. Un jour donné, l'agence a reçu 12 demandes de location. On note X le nombre de catégories A demandées.

Ex 10

Loi de Poisson

MDOE

★ ★

Une population de 80 personnes comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1,90m. Soit une population E_n de n personnes et X_n le nombre de personnes mesurant plus de 1,90m dans la population E_n . On admet que X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{n}{80}$. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une personne mesurant plus de 1,90m dans une population de 100 personnes ? 300 personnes ?

Ex 11

Loi géométrique

CRuo

★ ★ ★

Soit $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

1. Montrer que la probabilité que X prenne une valeur paire est $\frac{1-p}{2-p}$.

i

$$\text{Voir que } P(X \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k).$$

2. A-t-on plus de chances que X donne un résultat pair ou impair ?

Ex 12

Sur-réservation d'un vol

Qyru

★ ★ ★

Pour des raisons de rentabilité, le vol Océanic 815 reliant Sydney à Los Angeles a été sur-réservé. Il y a 98 places dans l'avion et 100 billets ont été vendus.

On estime que la probabilité qu'un passager se désiste est de 10%. Quelle est la probabilité qu'au moins un passager reste bloqué à Sydney ?

i

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y où Y le nombre de passagers à se présenter à l'embarquement.

Ex 13

Dilemme

qZkI

★ ★ ★

On considère deux avions A et B ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs fonctionnent de manière indépendante et chacun a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber en panne. On admet qu'un vol se termine bien si au moins la moitié des moteurs ne tombe pas en panne.

Quel avion est-il préférable de choisir ?

i

Pour chaque avion, modéliser le nombre de moteur qui tombe en panne par une variable aléatoire, déterminer sa loi puis décrire l'événement « un vol se termine bien » à l'aide de cette modélisation.

Ex 14

Couple de variables

6Wjb

★ ★

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules permettant des gains ou des pertes décrits comme suit :

- dans l'urne U_1 , il y a 1 boule « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 3 boules « gagnant 2€ » ;
- dans l'urne U_2 , il y a 3 boules « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 1 boules « gagnant 2€ » ;

Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient 6, il pioche une boule dans l'urne U_1 , sinon il pioche une boule dans l'urne U_2 .

On note X la variable aléatoire égale à 1 si le dé sort 6, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire égale au gain (en euros.)

1. Donner la loi du couple (X, Y) .

i

Utiliser la formule de Bayes pour calculer toutes les valeurs $P(X = k, Y = k')$.

2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .

i

On reconnaît une loi usuelle pour X .

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

i

Pour déterminer si les variables X et Y sont indépendantes, il faut vérifier si l'égalité

$$P(X = k, Y = k') = P(X = k) \times P(Y = k')$$

est vraie pour tous les couples de valeurs possibles (k, k') .

Testons cette égalité avec le couple $(1, -1)$.

Ex 15

Loi conjointe

hWfx

★ ★ ★

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soient y et a deux paramètres réels tels que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau joint :

$X \backslash Y$	-1	y
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{18}$
-1	$\frac{1}{9}$	0
1	0	a
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{6}$

1. Quelle est la seule valeur possible du paramètre a ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
4. Déterminer y de sorte que $\mathbb{E}(XY) = 0$.
5. On pose désormais $y = 1$ et on considère les variables aléatoires $U = Y$ et $V = \frac{X}{Y}$. Déterminer le tableau de la loi de probabilité du couple (U, V) . Que peut-on dire des variables aléatoires U et V ?



Déterminer dans un premier temps les valeurs prises par le couple (U, V) .

Ex 16**Jeu de boules**

jK62

★ ★ ★

On tire 4 boules avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 5. On dit que $i \in 1, 2, 3, 4, 5$ est une valeur gagnante si la boule numéro i est tirée au moins une fois. Pour tout $i \in 1, 2, 3, 4, 5$, soit X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le numéro i est une valeur gagnante, et 0 sinon.

1. Calculer $P(X_i = 0)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i pour $i = 1, \dots, 5$.
2. Calculer $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi jointe de (X_1, X_2) .
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de valeurs gagnantes. Exprimer X en fonction de $X_1, \dots, X_5$. Déterminer l'espérance de X .

Ex 17**Jeu de boules**

QqHC

★ ★ ★ ★

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n , où $n \in \mathbb{N}^*$ et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage de toutes les boules de l'urne, une à une et sans remise. On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui du premier numéro 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants si et seulement si $n = 2$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
4. On suppose maintenant que $n = 2$.
 - (a) Montrer que X et Y ont même loi.
 - (b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .