

Variables aléatoires discrètes



Version web

Ex 1

Probabilité d'événements

kJz6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et deux événements A et B . On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les événements complémentaires de A et B .

On dispose des valeurs suivantes :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{7}{8}, \quad P(\bar{B}) = \frac{3}{8}$$

Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(A \cap B)$;



On a $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

D'après la formule de Poincaré pour deux événements :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$;



D'après les lois de De Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$;



D'après les lois de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. $P(\bar{A} \cup B)$.



On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

On calcule $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$.

D'après la formule de l'union :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup B) &= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ P(\bar{A} \cup B) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ex 2

Probabilité d'événements

Hhtu

★ ★

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et trois événements A , B et C tels que :

$$P(A) = 0.3 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.2 \quad , \quad P(C | A \cap B) = 0.5$$

Calculer, si possible, les probabilités suivantes :

1. $P(A \cup B)$;



Par la formule des probabilités pour l'union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.2 = 0.5$$

2. $P(A | B)$;



Par la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A | B) = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

3. $P(\bar{A} | B)$;



La probabilité de l'événement complémentaire sous une condition :

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

$$P(\bar{A} | B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

4. $P(A | \bar{B})$;



On calcule d'abord $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Puis, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$.

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(A | \bar{B}) = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$$

5. $P(B | A)$;



Par la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B | A) = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

6. $P(A \cap B \cap C)$;



On utilise la formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B) \times P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$$

7. $P(\overline{A} \cap \overline{B})$;



D'après les lois de De Morgan :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

8. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.



D'après les lois de De Morgan :

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Ex 3

Fiabilité

YYAZ

★ ★

Une chaîne de montage d'ordinateurs utilise un lot de composants électroniques contenant 2% d'éléments défectueux. En début de chaîne, chaque composant est vérifié par un testeur dont la fiabilité n'est pas parfaite, de sorte que la probabilité que le testeur déclare un composant en bon état, sachant que le composant est réellement en bon état est de 0,95, et que la probabilité que le testeur déclare un composant en mauvais état, sachant que le composant est réellement en mauvais état est de 0,94.

Quelle est la probabilité qu'un composant déclaré en mauvais état par le testeur soit réellement en mauvais état ?



On note D l'événement « le composant est défectueux » et T l'événement « le testeur déclare le composant en mauvais état ». On cherche à calculer $P(D|T)$.

D'après l'énoncé, on a : $P(D) = 0,02$, $P(T|\overline{D}) = 0,95$ et $P(\overline{T}|D) = 0,94$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(D \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|\overline{D})P(\overline{D})} \\ &= \frac{0,94 \times 0,02}{0,05 \times 0,98 + 0,02 \times 0,94} \\ &= \frac{94}{339} \\ &\approx 0,277 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un composant déclaré en mauvais état par le testeur soit réellement en mauvais état est donc d'environ 27,7%.

Ex 4

Probabilité bayésienne

JHnB

★ ★

Un poison vient d'être ingéré par une personne. L'examen des lieux laisse penser que trois poisons p_1 , p_2 et p_3 seulement peuvent être incriminés. Le poison p_1 a une probabilité $\frac{1}{10}$ d'avoir été ingéré, le poison p_2 une probabilité de $\frac{1}{2}$ et le poison p_3 une probabilité de $\frac{2}{5}$.

De plus, on sait que chaque poison provoque chez la personne qui l'a ingéré un signe clinique s particulier, mais avec des probabilités différentes car ils n'ont pas la même composition. Ainsi, le poison p_1 provoque le signe clinique s avec une probabilité de $\frac{4}{5}$. Ce même signe est observable respectivement avec les probabilités $\frac{1}{50}$ pour le poison p_2 et $\frac{2}{5}$ pour le poison p_3 .

Quel est le poison qui a la plus grande probabilité d'avoir été absorbé, sachant que le signe clinique s est observé sur le patient ?



Soit A (respectivement B et C) l'événement « la personne a ingéré le poison p_1 (respectivement p_2 et p_3) ». Soit S l'événement « la personne présente le signe clinique s ».

On cherche à déterminer quel poison a la probabilité la plus élevée d'avoir été ingéré, sachant que le signe clinique s a été observé. Autrement dit, cela revient à calculer les probabilités suivantes :

$$- P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \times P(S|A)}{P(S)}$$

$$- P(B|S) = \frac{P(B) \times P(S|B)}{P(S)}$$

$$- P(C|S) = \frac{P(C) \times P(S|C)}{P(S)}$$

or par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$P(A|S) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{25}$$

$$P(B|S) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{50}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{25}$$

$$P(C|S) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{25}.$$

Le poison p_3 est donc le plus probable.

On peut remarquer qu'une partie des calculs n'étaient pas nécessaires ici : comme on a

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}, \quad P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}, \quad \text{et} \quad P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)},$$

il suffit en fait de comparer $P(A \cap S)$, $P(B \cap S)$ et $P(C \cap S)$ pour obtenir la conclusion.

Ex 5

Jeu et suite

f63Q

★ ★ ★

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, il a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner. Pour les parties suivantes, on suppose que :

- s'il a gagné la partie précédente, il a une probabilité de 0.6 de gagner la partie suivante ;
- s'il a perdu la partie précédente, il a une probabilité de 0.7 de perdre la partie suivante.

Soit G_n l'événement « le joueur a gagné la n -ième partie » et on note $u_n = P(G_n)$. On note également $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 , v_2 .



On a $u_1 = P(G_1) = \frac{1}{2}$ et $v_1 = P(\overline{G_1}) = 1 - u_1 = \frac{1}{2}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 u_2 &= P(G_2) \\
 &= P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1}) \\
 &= P(G_1) \times P(G_2|G_1) + P(\overline{G_1}) \times P(G_2|\overline{G_1}) \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times (1 - 0.7) \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3 \\
 &= 0.45.
 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 v_2 &= P(\overline{G_2}) \\
 &= P(\overline{G_2} \cap G_1) + P(\overline{G_2} \cap \overline{G_1}) \\
 &= P(G_1) \times P(\overline{G_2}|G_1) + P(\overline{G_1}) \times P(\overline{G_2}|\overline{G_1}) \\
 &= \frac{1}{2} \times (1 - 0.6) + \frac{1}{2} \times 0.7 \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.4 + \frac{1}{2} \times 0.7 \\
 &= 0.55.
 \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $v_2 = 1 - u_2 = 1 - 0.45 = 0.55$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3v_n$. En déduire une relation matricielle entre $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= P(G_{n+1}) \\
 &= P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap \overline{G_n}) \\
 &= P(G_n) \times P(G_{n+1}|G_n) + P(\overline{G_n}) \times P(G_{n+1}|\overline{G_n}) \\
 &= u_n \times 0.6 + v_n \times (1 - 0.7) \\
 &= 0.6u_n + 0.3v_n.
 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= P(\overline{G_{n+1}}) \\
 &= P(\overline{G_{n+1}} \cap G_n) + P(\overline{G_{n+1}} \cap \overline{G_n}) \\
 &= P(G_n) \times P(\overline{G_{n+1}}|G_n) + P(\overline{G_n}) \times P(\overline{G_{n+1}}|\overline{G_n}) \\
 &= u_n \times (1 - 0.6) + v_n \times 0.7 \\
 &= 0.4u_n + 0.7v_n.
 \end{aligned}$$

On a donc pour tout $n \geq 1$, la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la suite de terme général $u_n - \frac{3}{7}$ est une suite géométrique de raison 0.3 et en déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n ainsi que leur limite quand $n \rightarrow +\infty$.



Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n + v_n = P(G_n) + P(\overline{G_n}) = 1$, donc $v_n = 1 - u_n$. En utilisant la relation de la question précédente, on a : $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3v_n = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.6u_n + 0.3 - 0.3u_n = 0.3u_n + 0.3$.

Soit la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par $w_n = u_n - \frac{3}{7}$. Montrons que cette suite est géométrique. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{3}{7} \\ &= (0.3u_n + 0.3) - \frac{3}{7} \\ &= 0.3u_n + \frac{3}{10} - \frac{3}{7} \\ &= 0.3u_n + \frac{21 - 30}{70} \\ &= 0.3u_n - \frac{9}{70} \\ &= 0.3\left(u_n - \frac{3}{7}\right) \\ &= 0.3w_n. \end{aligned}$$

En factorisant par 0.3, on obtient :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 0.3 \left(u_n - \frac{9/70}{0.3} \right) \\ &= 0.3 \left(u_n - \frac{9}{70} \times \frac{10}{3} \right) \\ &= 0.3 \left(u_n - \frac{3}{7} \right) \\ &= 0.3w_n. \end{aligned}$$

La suite (w_n) de terme général $u_n - \frac{3}{7}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0.3$.

Le premier terme est $w_1 = u_1 - \frac{3}{7} = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7-6}{14} = \frac{1}{14}$.

On en déduit l'expression de w_n en fonction de n : $w_n = w_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{14} \times 0.3^{n-1}$. Comme $w_n = u_n - \frac{3}{7}$, on a $u_n = w_n + \frac{3}{7}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} \times 0.3^{n-1}$.

On en déduit l'expression de v_n : $v_n = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{14} \times 0.3^{n-1}\right) = \frac{4}{7} - \frac{1}{14} \times 0.3^{n-1}$.

Comme $|0.3| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.3^{n-1} = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{7}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{4}{7}$.

Cela signifie que sur un grand nombre de parties, la probabilité de gagner du joueur tend vers $\frac{3}{7}$.

Ex 6

Loi d'une variable aléatoire discrète

JpRc



Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$ telle que :

$$P(X < 5) = \frac{1}{6}, \quad P(X > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(X \leq 3) = P(X = 4).$$

Déterminer la loi de X et calculer son espérance.



- $P(X > 5) = P(X = 6) = \frac{1}{2}$
- $1 = P(X < 5) + P(X = 5) + P(X > 5)$ donc $P(X = 5) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
- $P(X \leq 3) = P(X = 3) = P(X = 4)$ et $\frac{1}{6} = P(X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4)$ donc $P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{1}{12}$

On a ainsi déterminé la loi de X :

ω	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5) + 6 \times P(X = 6) = \frac{21}{4} = 5.25$$

Ex 7

Dé truqué

Le02

★ ★ ★

On considère un dé truqué cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro obtenu à l'issue d'un lancer.

1. Déterminer la loi de X .



D'après les informations, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $P(X = k) = kP(X = 1)$. Or, par définition d'une loi de probabilité, on a $\sum_{k=1}^6 P(X = k) = 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^6 P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^6 kP(X = 1) \\ &= P(X = 1) \sum_{k=1}^6 k \\ &= P(X = 1) \times \frac{6 \times 7}{2} \\ &= 21P(X = 1). \end{aligned}$$

On en déduit que $P(X = 1) = \frac{1}{21}$ et donc que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $P(X = k) = \frac{k}{21}$.

2. Calculer l'espérance de X .



Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^6 k \times \frac{k}{21} \\ &= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 \\ &= \frac{7 \times 13}{21} \\ &= \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.



Les valeurs prises par Y sont les inverses des valeurs prises par X . Ainsi, on a pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(Y = \frac{1}{k}) = P(X = k)$.

Pour calculer l'espérance, on utilise la définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} P\left(Y = \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \times \frac{k}{21} \\ &= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 1 \\ &= \frac{6}{21} \\ &= \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Ex 8**Gain au loto**

5sHJ

Le loto est un jeu consistant à choisir six numéros différents compris entre 1 et 49. Au dernier tirage, il fallait jouer les numéros : 4, 8, 21, 23, 42 et 49. Le gain était de 700 000 euros avec les six bons numéros, de 1100 euros avec cinq bons numéros, de 20 euros avec quatre bons numéros et de 1 euro avec trois bons numéros.

Pour un jeu simple, calculer l'espérance de gain.



Soit X le nombre de bons numéros trouvés par le joueur. Alors X suit une loi hypergéométrique de paramètres : $\mathcal{H}(6, \frac{1}{46}, 49)$. Une loi hypergéométrique de paramètres (N, p, n) est une loi de probabilité sur $\{0, 1, \dots, N\}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, N\}, P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Elle permet de modéliser le tirage sans remise de n boules parmi N boules dont n sont marquées. Ici, $N = 49$, $n = 6$ et $p = \frac{1}{46}$.

Soit Y le gain du joueur. Alors on a

k	0	0	0	1	20	1100	700 000
$P(Y = k)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$P(X = 6)$

On a donc

$$\mathbb{E}(Y) = P(X = 3) + 20 \times P(X = 4) + 1100 \times P(X = 5) + 700000 \times P(X = 6).$$

Or

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\,820}{13\,983\,816}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13\,545}{13\,983\,816}$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13\,983\,816}$$

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6} \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{13\,983\,816} (246\,820 + 20 \times 13\,545 + 1\,100 \times 258 + 700\,000) = \frac{1\,501\,520}{13\,983\,816} \simeq 0.1074$$

L'espérance du gain du joueur (sans compter sa mise de départ) est d'environ 0.11 euros.

Ex 9

Identification de lois usuelles

r3ax



Pour chacune des situations suivantes, déterminer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance.

1. On lance un dé équilibré 100 fois de suite et on note X le nombre d'apparitions du chiffre « 2 ».



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{6}$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = n \times p = \frac{50}{3}$.

2. Deux personnes lancent chacune une pièce équilibrée. On dit que l'expérience est un succès si elles obtiennent toutes les deux « face ».
 - (a) Ces personnes répètent l'expérience 8 fois. On note X le nombre de succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{4}$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = n \times p = 2$.

- (b) Ces personnes répètent l'expérience jusqu'à ce qu'elles obtiennent un succès. On note X le nombre de lancers.



La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 4$.

3. Une agence de location de voitures propose à ses clients 3 catégories de voitures : A , B et C . Elle a constaté que dans une journée, 40% des demandes sont pour A , 50% des demandes sont pour B , 10% des demandes sont pour C . Les demandes de location sont supposées indépendantes. Un jour donné, l'agence a reçu 12 demandes de location. On note X le nombre de catégories A demandées.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0.4$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = 4,8$.

Ex 10**Loi de Poisson**

MDOE

★ ★

Une population de 80 personnes comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1,90m. Soit une population E_n de n personnes et X_n le nombre de personnes mesurant plus de 1,90m dans la population E_n . On admet que X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{n}{80}$. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une personne mesurant plus de 1,90m dans une population de 100 personnes ? 300 personnes ?



Dans une population de 100 personnes, il suffit de calculer $1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\frac{100}{80}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}} \approx 0.71$.
Dans une population de 300 personnes, il suffit de calculer $1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\frac{300}{80}} \approx 0.98$.

Ex 11**Loi géométrique**

CRuo

★ ★ ★

Soit $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

1. Montrer que la probabilité que X prenne une valeur paire est $\frac{1-p}{2-p}$.



$$P(X \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

2. A-t-on plus de chances que X donne un résultat pair ou impair ?



De même, on calcule $P(X \text{ est impair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k} = \frac{1}{2-p}$. Or $0 < 1-p < 1$ donc on a ainsi montré que la probabilité d'avoir un nombre impair est plus grande que celle d'avoir un nombre pair.

Ex 12

Sur-réservation d'un vol

Qyru

★ ★ ★

Pour des raisons de rentabilité, le vol Océanic 815 reliant Sydney à Los Angeles a été sur-réservé. Il y a 98 places dans l'avion et 100 billets ont été vendus. On estime que la probabilité qu'un passager se désiste est de 10%. Quelle est la probabilité qu'au moins un passager reste bloqué à Sydney ?



Soit Y le nombre de passagers à se présenter à l'embarquement : $Y \sim \mathcal{B}(100, 0.9)$ et on cherche la probabilité qu'il y ait au moins un passager bloqué à Sydney, c'est-à-dire qu'il y ait plus de 99 personnes à se présenter :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 99) &= P(Y = 99) + P(Y = 100) \\ &= \binom{100}{99} \times 0.9^{99} \times 0.1^1 + \binom{100}{100} \times 0.9^{100} \times 0.1^0 \\ &\simeq 0.00032, \end{aligned}$$

soit environ 0.03% de chance qu'il y ait au moins un passager bloqué à Sydney.

Ex 13

Dilemme

qZkI

★ ★ ★

On considère deux avions A et B ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs fonctionnent de manière indépendante et chacun a une probabilité $p \in]0; 1[$ de tomber en panne. On admet qu'un vol se termine bien si au moins la moitié des moteurs ne tombe pas en panne. Quel avion est-il préférable de choisir ?



Soit X le nombre de moteurs tombant en panne sur l'avion A et Y le nombre de moteurs tombant en panne sur l'avion B . Alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, p)$ et Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

Le vol A se termine bien se traduit par l'événement $\{X \leq 1\}$ et le vol B se termine bien se traduit par l'événement $\{Y = 0\}$.

On calcule donc $P(X = 0) + P(X = 1) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3$ et $P(Y = 0) = (1-p)^2$.

Il est préférable de prendre l'avion A si et seulement si $P(X = 0) + P(X = 1) \geq P(Y = 0)$, c'est-à-dire :

$$p(1-p)^2(2-3p) \geq 0 \iff 2-3p \geq 0$$

En conclusion, si $p < \frac{2}{3}$, il est préférable de prendre l'avion A .

Ex 14

Couple de variables

6Wjb

★ ★

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules permettant des gains ou des pertes décrits comme suit :

- dans l'urne U_1 , il y a 1 boule « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 3 boules « gagnant 2€ » ;
- dans l'urne U_2 , il y a 3 boules « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 1 boules « gagnant 2€ » ;

Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient 6, il pioche une boule dans l'urne U_1 , sinon il pioche une boule dans l'urne U_2 .

On note X la variable aléatoire égale à 1 si le dé sort 6, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire égale au gain (en euros.)

1. Donner la loi du couple (X, Y) .



Pour calculer par exemple $P(X = 1, Y = -1)$, on utilise la formule de Bayes :

$$P(X = 1, Y = -1) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = -1\}) = P(X = 1)P(Y = -1 | X = 1)$$

Or d'après l'énoncé, $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $P(Y = -1 | X = 1) = \frac{1}{6}$ d'où $P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{36}$.
En procédant de même pour tous les couples de valeurs possibles, on obtient :

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
$X = 0$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$

2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .



On obtient directement que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. De plus, par somme, on obtient la loi suivante pour Y :

k	-1	0	2
$P(Y = k)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?



D'après la loi conjointe, nous avons :

$$P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{36}$$

Calculons maintenant le produit des probabilités marginales :

$$P(X = 1) \times P(Y = -1) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$$

On constate que $\frac{1}{36} \neq \frac{2}{27}$.

Puisque l'égalité $P(X = k, Y = k') = P(X = k)P(Y = k')$ n'est pas vérifiée pour au moins un couple de valeurs, on peut conclure que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Ex 15

Loi conjointe

hWfX

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soient y et a deux paramètres réels tels que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau joint :

$X \backslash Y$	-1	y
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{18}$
-1	$\frac{1}{9}$	0
1	0	a
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{6}$

1. Quelle est la seule valeur possible du paramètre a ?



On a nécessairement :

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{18} + \frac{1}{9} + a + \frac{1}{18} + \frac{2}{6} = 1$$

donc $a = \frac{2}{9}$.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Ces variables sont-elles indépendantes ?



$X \backslash Y$	-1	y	P_X (loi de X)
-2	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$
-1	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{2}{18}$
1	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$
P_Y (loi de Y)	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$	1

Il n'y a pas indépendance des variables X et Y car $P(X = 1, Y = -1) = 0$ et $P(X = 1)P(Y = -1) = \frac{6}{18} \times \frac{4}{18} \neq 0$.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.



L'espérance de X est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= (-2)P(X = -2) + (-1)P(X = -1) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) \\ &= (-2) \times \frac{5}{18} + (-1) \frac{2}{18} + \frac{4}{18} + 2 \times \frac{7}{18} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

L'espérance de Y est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= (-1)P(Y = -1) + yP(Y = y) \\ &= (-1) \times \frac{6}{18} + y \times \frac{12}{18} \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}y. \end{aligned}$$

4. Déterminer y de sorte que $\mathbb{E}(XY) = 0$.



Il faut déterminer la loi de XY . Les valeurs possibles prises par XY sont données dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	-1	y
-2	$XY = 2$	$XY = -2y$
-1	$XY = 1$	$XY = -y$
1	$XY = -1$	$XY = y$
2	$XY = -2$	$XY = 2y$

On en déduit la loi de XY :

k	-2	-1	1	2	$-2y$	$-y$	y	$2y$
$P(XY = k)$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$

soit de manière plus synthétique :

k	-2	1	2	$-2y$	y	$2y$
$P(XY = k)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$

L'espérance de XY est donc la suivante :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{18} \times (-2 + 2 + 6 - 4y + 4y + 12y) = \frac{1}{18} \times (6 + 12y).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{18} \times (6 + 12y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. On pose désormais $y = 1$ et on considère les variables aléatoires $U = Y$ et $V = \frac{X}{Y}$. Déterminer le tableau de la loi de probabilité du couple (U, V) . Que peut-on dire des variables aléatoires U et V ?



On s'intéresse d'abord aux valeurs que le couple $(U = Y, V = \frac{X}{Y})$ peut prendre :

$X \backslash Y$	-1	1
-2	$(U, V) = (-1, 2)$ $\frac{3}{18}$	$(U, V) = (1, -2)$ $\frac{2}{18}$
-1	$(U, V) = (-1, 1)$ $\frac{2}{18}$	$(U, V) = (1, -1)$ 0
1	$(U, V) = (-1, -1)$ 0	$(U, V) = (1, 1)$ $\frac{4}{18}$
2	$(U, V) = (-1, -2)$ $\frac{1}{18}$	$(U, V) = (1, 2)$ $\frac{6}{18}$

On obtient ainsi la loi du couple (U, V) :

$X \backslash Y$	-2	1	2	P_U (loi de U)
-1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$
1	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$
P_V (loi de V)	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{9}{18}$	1

On peut vérifier que :

$$\forall i \in \{-1, 1\}, \forall j \in \{-2, 1, 2\}, \quad P(U = i, V = j) = P(U = i) \times P(V = j)$$

donc les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Ex 16

Jeu de boules

jK62

★ ★ ★

On tire 4 boules avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 5. On dit que $i \in 1, 2, 3, 4, 5$ est une valeur gagnante si la boule numéro i est tirée au moins une fois. Pour tout $i \in 1, 2, 3, 4, 5$, soit X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le numéro i est une valeur gagnante, et 0 sinon.

1. Calculer $P(X_i = 0)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i pour $i = 1, \dots, 5$.



On a $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ valeur gagnante} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$P(X_i = 0) = P(\text{"La boule numérotée } i \text{ n'a jamais été tirée"}) = \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

Comme X_i ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1, on en déduit :

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625},$$

ce qui revient à dire que $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right)$. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625},$$

$$V(X_i) = \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{94\,464}{390\,625}.$$

2. Calculer $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?



$$\begin{aligned} P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) &= P(\text{"Les boules numérotées 1 et 2 n'ont jamais été tirées"}) \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} \end{aligned}$$

or $P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4$ donc $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) \neq P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$.
On en conclut que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3. Déterminer la loi jointe de (X_1, X_2) .



$X \backslash Y$	0	1	P_{X_2} (loi de X_2)
0	$\frac{81}{625}$	$\frac{175}{625}$	$\frac{256}{625}$
1	$\frac{175}{625}$	$\frac{194}{625}$	$\frac{369}{625}$
P_{X_1} (loi de X_1)	$\frac{256}{625}$	$\frac{369}{625}$	1

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de valeurs gagnantes. Exprimer X en fonction de $X_1, \dots, X_5$. Déterminer l'espérance de X .



On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Comme les variables aléatoires X_i sont de même loi, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}(X_i) = 5\mathbb{E}(X_1) = 5 \times \frac{369}{625} = \frac{369}{125} \simeq 2.95.$$

En moyenne, on aura quasiment 3 valeurs gagnantes par jeu.

Ex 17

Jeu de boules

QqHC

★★★★

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n , où $n \in \mathbb{N}^*$ et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage de toutes les boules de l'urne, une à une et sans remise. On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui du premier numéro 1.

- Déterminer la loi de X .



X étant le rang d'apparition de la première boule blanche et l'urne contenant n boules blanches et 2 boules noires, les valeurs prises par X sont les suivantes

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$$

Déterminons les probabilités de chaque issue :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\text{"On obtient une boule blanche au premier tirage"}) \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\text{"On obtient une boule noire puis une boule blanche"}) \\ &= \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(\text{"On obtient deux boules noires puis une boule blanche"}) \\ &= \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$. On a ainsi déterminé la loi de X , que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{n}{n+2}$	$\frac{2n}{(n+2)(n+1)}$	$\frac{2}{(n+2)(n+1)}$

- Montrer que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants si et seulement si $n = 2$.



On a :

$$\begin{aligned} - P(X = 1, Y = 1) &= P(\text{"On obtient la boule blanche numérotée 1 au premier tirage"}) = \frac{1}{n+2}. \\ - P(X = 1)P(Y = 1) &= \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2} \\ - \{X = 1\} \text{ et } \{Y = 1\} &\text{ sont indépendants si et seulement si} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} = \frac{2n}{(n+2)^2} \\ &\Leftrightarrow 2n = n+2 \\ &\Leftrightarrow n = 2. \end{aligned}$$

- Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.



Pour $n \neq 2$, on a montré, par la question précédente, que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ n'étaient pas indépendants, ce qui montre que les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Pour $n = 2$, on a alors 2 boules blanches et 2 boules noires dans l'urne. Ainsi,

$$P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

et $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$. Par conséquent, $P(X = 2, Y = 2) \neq P(X = 2)P(Y = 2)$, ce qui implique que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On suppose maintenant que $n = 2$.

(a) Montrer que X et Y ont même loi.



La loi de X a été déterminée à la question 1. Pour Y , on a $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et

$$P(Y = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(X = 1)$$

$$P(Y = 2) = \frac{1}{3} = P(X = 2)$$

$$P(Y = 3) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} = P(X = 3)$$

donc X et Y ont même loi.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .



$Y \backslash X$	1	2	3	P_Y (loi de Y)
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
P_X (loi de X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1