

Séries de Fourier



Version web

Ex 1

Introduction aux séries de Fourier

uI4M

★ ★

Peut-on reconstruire une fonction périodique à partir des fonctions

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots?$$

On considère la fonction f , 2π -périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$. On cherche à l'approcher par une fonction de la forme $S_1(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-\pi, \pi]$, déterminer sa parité, et en déduire lequel de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ est adapté pour l'approcher. Que conjecture-t-on sur le coefficient a ?
2. On choisit donc une approximation de la forme $S_1(x) = b \sin(x)$. On souhaite choisir b de sorte que l'erreur quadratique intégrale

$$E(b) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - b \sin(x))^2 dx$$

soit minimale. Montrer que minimiser $E(b)$ revient à imposer la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - b \sin(x)) \sin(x) dx = 0.$$

3. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx$, puis $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$ par intégration par parties. En déduire la valeur de b telle que $E(b)$ est minimale puis l'expression de S_1 .
4. On cherche maintenant une approximation plus précise de f , sous la forme

$$S_2(x) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x).$$

On impose que l'erreur $f(x) - S_2(x)$ soit orthogonale à $\sin(x)$ et à $\sin(2x)$. Écrire les deux conditions intégrales correspondantes.

5. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(2x) dx = 0$, puis en déduire que les deux coefficients b_1 et b_2 peuvent être déterminés séparément par

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

6. Calculer b_2 par intégration par parties. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

En déduire une expression générale de b_n .

7. On obtient ainsi formellement, pour $x \in]-\pi, \pi[$:

$$x = 2 \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \dots$$

Note sur la convergence. Cette égalité repose sur le théorème de Dirichlet, admis ici. On ne peut pas l'établir à l'aide des seuls critères des séries numériques, car les termes $\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ oscillent simultanément en n et en x . Comparer cette écriture avec les développements en série entière déjà rencontrés : quel est le point commun ? Quelle différence importante apparaît ici ?

8. En évaluant formellement l'égalité précédente en $x = \frac{\pi}{2}$, montrer que l'on retrouve la série numérique

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Ex 2

Une fonction "créneau" simple et sa parité

IwCg

Soit la fonction $g(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{si } x \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi[\end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est de calculer les coefficients de Fourier pour cette fonction paire simple et d'interpréter le coefficient a_0 .

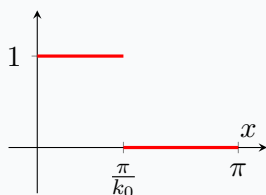
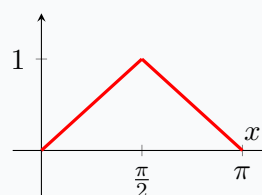
1. Tracer le graphe de $g(x)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. La fonction $g(x)$ est-elle paire ? Impaire ? Ni l'une ni l'autre ? Justifier.
3. Quelle conséquence la parité de $g(x)$ a-t-elle sur ses coefficients de Fourier b_n ?
4. Calculer le coefficient a_0 . Quelle est son interprétation graphique ? On rappelle que $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$.
5. Calculer les coefficients a_n pour $n \geq 1$. On rappelle que $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$. Discuter la valeur de a_n selon la parité de n (si n est pair ou impair, en distinguant le cas $n = 0$ déjà traité).
6. Écrire les premiers termes non nuls de la série de Fourier de $g(x)$.

Ex 3

Fonctions périodiques et coefficients de Fourier

EXyV

On considère les fonctions f et g comme dessinées ci-dessous, que l'on étend à des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont impaires et 2π -périodiques.

— f — g

1. Soit un entier $k_0 \geq 2$. Donner l'expression de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction de $x \in [0; \pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f puis exprimer la série de Fourier de f .

Ex 4

Fonction périodique et série de Fourier

8SbE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie par $f(x) = \pi - |x|$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.

1. Calculer la série de Fourier trigonométrique de f .

2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Ex 5

Egalité à une série de Fourier

Kush

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, impaire, 2π -périodique, définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

1. Dessiner le graphe de f . Quelle est la régularité de f ?

2. Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

3. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4. En déduire la valeur exacte de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.