

## Séries entières



Version web

Ex 1

## Convergence de séries entières

aoB6

Calculer le rayon  $R$  de convergence et déterminer le domaine  $D$  de convergence (sauf pour la question 8) des séries entières réelles suivantes.

1.  $S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n$

4.  $S_4(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} t^n$

7.  $S_7(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n t^{2n}$

2.  $S_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n$

5.  $S_5(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} t^n$

8.  $S_8(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} t^{3n}$

3.  $S_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$

6.  $S_6(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n} t^n$

Ex 2

## Calcul d'une somme de série entière

dC7P

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$  à variable complexe.

2. Rappeler ce que vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ , puis  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$ .

Ex 3

## Calcul d'une somme de série entière

urin

1. En utilisant le résultat de la somme de la série entière  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ , déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ . On précisera son domaine de convergence.

2. Déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 x^k$ . On précisera son domaine de convergence.

3. Après avoir décomposé la fraction rationnelle  $\frac{1}{n(n+2)}$  en éléments simples, déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ . On précisera son rayon de convergence.

## Ex 4

## Identification des coefficients d'une série entière

h8cy

★ ★

On rappelle que, pour tout réel  $x$  tel que  $|x| < 1$ ,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

1. En dérivant cette égalité, montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

2. En déduire le développement en série entière de  $\frac{x}{(1-x)^2}$ . On donnera explicitement le coefficient de  $x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En utilisant l'égalité  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(x^2)}$ , déterminer le développement en série entière de  $\frac{1}{1-x^2}$ . On précisera le coefficient de  $x^n$  selon la parité de  $n$ .
4. Déterminer de même le développement en série entière de  $\frac{x}{1-x^2}$ . On précisera le coefficient de  $x^n$  selon la parité de  $n$ .
5. En déduire le développement en série entière de  $\frac{1+x}{1-x^2}$ . Que remarque-t-on ?
6. Pour chacune des fonctions précédentes, préciser le rayon de convergence du développement obtenu.

## Ex 5

## Calcul d'une somme de série entière

kbR8

On considère la série entière  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n^2 + 3n + 2}$ .

1. Calculer son rayon de convergence  $R$ . Si  $|x| = R$ , cette série converge-t-elle ?
2. Décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$  en éléments simples, c'est-à-dire trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$ .
3. Calculer la somme de la série pour  $|x| < R$ .

## Ex 6

## Calcul d'une somme de série entière

tPHB

Soit la série entière  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série. Préciser son intervalle de convergence et le comportement de la série aux extrémités de cet intervalle.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$  et de la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$  ?  
Étudier le comportement de chacune de ces séries au bord de son intervalle de convergence.
3. Calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$ .
4. En déduire la somme de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$ .

Ex 7

## Développement en série entière d'une fonction

9oDf

Soit la fonction d'une variable réelle  $f: x \mapsto e^{x^2} - 1$ . Déterminer un développement en série entière de la fonction  $f$  et préciser le rayon de convergence.

Ex 8

## Développement d'une fonction usuelle en série entière

6YTv

À l'aide des développements en séries entières des fonctions usuelles, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+3x}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et déterminer le rayon de convergence de ces développements.