

Séries entières



Version web

Ex 1

Convergence de séries entières

aoB6

Calculer le rayon R de convergence et déterminer le domaine D de convergence (sauf pour la question 8) des séries entières réelles suivantes.

1. $S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n$

4. $S_4(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} t^n$

7. $S_7(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n t^{2n}$

2. $S_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n$

5. $S_5(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} t^n$

8. $S_8(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} t^{3n}$

3. $S_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$

6. $S_6(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n} t^n$

Ex 2

Calcul d'une somme de série entière

dC7P

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$ à variable complexe.

2. Rappeler ce que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$.

Ex 3

Calcul d'une somme de série entière

urin

1. En utilisant le résultat de la somme de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$. On précisera son domaine de convergence.

2. Déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 x^k$. On précisera son domaine de convergence.

3. Après avoir décomposé la fraction rationnelle $\frac{1}{n(n+2)}$ en éléments simples, déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$. On précisera son rayon de convergence.

Ex 4

Identification des coefficients d'une série entière

h8cy

★ ★

On rappelle que, pour tout réel x tel que $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

1. En dérivant cette égalité, montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

1

La dérivation terme à terme est licite sur le disque ouvert de convergence.

2. En déduire le développement en série entière de $\frac{x}{(1-x)^2}$. On donnera explicitement le coefficient de x^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant l'égalité $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(x^2)}$, déterminer le développement en série entière de $\frac{1}{1-x^2}$. On précisera le coefficient de x^n selon la parité de n .
4. Déterminer de même le développement en série entière de $\frac{x}{1-x^2}$. On précisera le coefficient de x^n selon la parité de n .
5. En déduire le développement en série entière de $\frac{1+x}{1-x^2}$. Que remarque-t-on ?
6. Pour chacune des fonctions précédentes, préciser le rayon de convergence du développement obtenu.

Ex 5

Calcul d'une somme de série entière

kbR8

On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n^2 + 3n + 2}$.

1. Calculer son rayon de convergence R . Si $|x| = R$, cette série converge-t-elle ?
2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ en éléments simples, c'est-à-dire trouver les réels α et β tels que $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$.
3. Calculer la somme de la série pour $|x| < R$.

Ex 6

Calcul d'une somme de série entière

tPHB

Soit la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série. Préciser son intervalle de convergence et le comportement de la série aux extrémités de cet intervalle.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$ et de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$? Étudier le comportement de chacune de ces séries au bord de son intervalle de convergence.
3. Calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$.
4. En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$.

Ex 7**Développement en série entière d'une fonction**

9oDf

Soit la fonction d'une variable réelle $f: x \mapsto e^{x^2} - 1$. Déterminer un développement en série entière de la fonction f et préciser le rayon de convergence.

Ex 8**Développement d'une fonction usuelle en série entière**

6YTv

À l'aide des développements en séries entières des fonctions usuelles, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+3x}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et déterminer le rayon de convergence de ces développements.