

## Séries entières



Version web

Ex 1

## Convergence de séries entières

aoB6

Calculer le rayon  $R$  de convergence et déterminer le domaine  $D$  de convergence (sauf pour la question 8) des séries entières réelles suivantes.

$$1. S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n$$



$R = 1$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = n^2 t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série  $\sum n^2 t^n$  converge si  $|t| < 1$  et diverge si  $|t| > 1$ . D'où  $R = 1$ .

Pour  $t = 1$ ,  $n^2 t^n = n^2$  et  $\sum n^2$  diverge grossièrement. Pour  $t = -1$ ,  $\sum (-1)^n n^2$  diverge grossièrement. Donc  $D = ]-1; 1[$ .

$$2. S_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n$$



$R = +\infty$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \frac{(-2)^n}{n!} t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2}{n+1} |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'où  $R = +\infty$ .

$$3. S_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$$



$R = 1$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge si  $|t| < 1$  et diverge si  $|t| > 1$ . D'où  $R = 1$ .

Pour  $t = \pm 1$ , on a  $|u_n(t)| \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , donc  $\sum |u_n(t)|$  converge. Donc  $D = [-1, 1]$ .

$$4. S_4(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} t^n$$



$R = 1$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \frac{\ln n}{n} t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge si  $|t| < 1$  et diverge si  $|t| > 1$ . D'où  $R = 1$ .  
Pour  $t = -1$ , la série  $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  converge par le théorème des séries alternées. Pour  $t = 1$ , la série  $\sum \frac{\ln n}{n}$  diverge par comparaison à la série harmonique. Donc  $D = [-1, 1[$ .

$$5. S_5(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} t^n$$



$R = +\infty$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \frac{1}{n^n} t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'où  $R = +\infty$ .

$$6. S_6(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n} t^n$$



$R = 0$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \frac{n^n}{\ln n} t^n$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série diverge pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ . D'où  $R = 0$ .

$$7. S_7(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n t^{2n}$$



$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$  : Il s'agit d'une série géométrique de raison  $2t^2$ . Elle converge si et seulement si  $2|t|^2 < 1$ , i.e.  $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . D'où  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $D = \left] -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ .

$$8. S_8(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} t^{3n}$$



$R = 2^{1/6}$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $u_n = \frac{(1+i)^n}{n 2^n} t^{3n}$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|1+i|}{2} |t|^3 = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} |t|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|t|^3}{\sqrt{2}},$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge si  $\frac{|t|^3}{\sqrt{2}} < 1$  et diverge si  $\frac{|t|^3}{\sqrt{2}} > 1$ . D'où  $R = 2^{1/6}$ .

## Ex 2

## Calcul d'une somme de série entière

dC7P

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$  à variable complexe.



$R = +\infty$  et  $D = \mathbb{C}$ .

2. Rappeler ce que vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ , puis  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$ .



$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Pour la première somme :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la deuxième somme :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n = \begin{cases} \frac{e^{2z} - 1}{2z} + e^{2z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Ex 3

## Calcul d'une somme de série entière

urin

1. En utilisant le résultat de la somme de la série entière  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ , déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ . On précisera son domaine de convergence.



On dérive  $\frac{1}{1-x}$  :  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$ . En multipliant par  $x$ , on obtient :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. Déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 x^k$ . On précisera son domaine de convergence.



On dérive deux fois  $\frac{1}{1-x}$  :  $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$  car les deux premiers termes sont nuls. Par changement d'indice, on obtient :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)kx^{k-1}.$$

d'où :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad \frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)kx^k.$$

Or  $(k+1)^2 = k(k+1) + (k+1)$  donc :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

3. Après avoir décomposé la fraction rationnelle  $\frac{1}{n(n+2)}$  en éléments simples, déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles  $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ . On précisera son rayon de convergence.



Ici,  $R = 1$  :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad S_3(x) = \frac{1}{2} \left( -\ln(1-x) + \frac{1}{x^2} \left[ \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right] \right).$$

#### Ex 4

#### Identification des coefficients d'une série entière

h8cy

★ ★

On rappelle que, pour tout réel  $x$  tel que  $|x| < 1$ ,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

1. En dérivant cette égalité, montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$



La série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  converge normalement sur tout compact de  $(-1, 1)$ , donc on peut dériver terme à terme sur  $(-1, 1)$ . On obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

2. En déduire le développement en série entière de  $\frac{x}{(1-x)^2}$ . On donnera explicitement le

coefficient de  $x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



Pour  $|x| < 1$ , en multipliant l'égalité précédente par  $x$  :

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

Le coefficient de  $x^n$  est donc  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (avec la convention que le coefficient de  $x^0$  est 0).

3. En utilisant l'égalité  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(x^2)}$ , déterminer le développement en série entière de  $\frac{1}{1-x^2}$ . On précisera le coefficient de  $x^n$  selon la parité de  $n$ .



Pour  $|x| < 1$ , on substitue  $x^2$  à  $x$  dans la série géométrique :

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

Le coefficient de  $x^n$  est donc 1 si  $n$  est pair, et 0 si  $n$  est impair. Le rayon de convergence est  $R = 1$ .

4. Déterminer de même le développement en série entière de  $\frac{x}{1-x^2}$ . On précisera le coefficient de  $x^n$  selon la parité de  $n$ .



Pour  $|x| < 1$ , en multipliant par  $x$  :

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}.$$

Le coefficient de  $x^n$  est donc 1 si  $n$  est impair, et 0 si  $n$  est pair. Le rayon de convergence est  $R = 1$ .

5. En déduire le développement en série entière de  $\frac{1+x}{1-x^2}$ . Que remarque-t-on ?



Pour  $|x| < 1$ , en additionnant les deux développements précédents :

$$\frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

On remarque que  $\frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x}$  pour  $x \neq -1$ , ce qui est cohérent avec la série géométrique de départ.

6. Pour chacune des fonctions précédentes, préciser le rayon de convergence du développement obtenu.



Toutes les séries obtenues ont un rayon de convergence  $R = 1$  :

- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ ,  $R = 1$  (la série géométrique dérivée terme à terme conserve le rayon de convergence) ;
- $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ ,  $R = 1$  ;
- $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ ,  $R = 1$  ;
- $\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$ ,  $R = 1$  ;
- $\frac{1+x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ,  $R = 1$ .

### Ex 5

### Calcul d'une somme de série entière

kbR8

On considère la série entière  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n^2 + 3n + 2}$ .

1. Calculer son rayon de convergence  $R$ . Si  $|x| = R$ , cette série converge-t-elle ?



$$R = \frac{1}{3}$$

Pour  $|x| = \frac{1}{3}$ , la série converge absolument car  $\frac{1}{n^2+3n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

2. Décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$  en éléments simples, c'est-à-dire trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$ .



$$\alpha = 1 \text{ et } \beta = -1$$

3. Calculer la somme de la série pour  $|x| < R$ .



Soit  $|x| < R$ . On a

$$S(x) = \frac{1}{3x} \ln(1-3x) \left( \frac{1}{3x} - 1 \right) + \frac{1}{3x}.$$

### Ex 6

### Calcul d'une somme de série entière

tPHB

Soit la série entière  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série. Préciser son intervalle de convergence et le comportement de la série aux extrémités de cet intervalle.



$R = 1$  et  $D = [-1; 1]$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$  et de la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$  ?

Étudier le comportement de chacune de ces séries au bord de son intervalle de convergence.



Pour la première,  $R = 1$  et  $D = ]-1; 1]$ .

Pour la deuxième,  $R = 1$  et  $D = ]-1; 1[$ .

3. Calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n x^{n-2}$ .



$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x}.$$

4. En déduire la somme de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$ .



$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = \ln(1+x).$$

## Ex 7

## Développement en série entière d'une fonction

9oDf

Soit la fonction d'une variable réelle  $f: x \mapsto e^{x^2} - 1$ . Déterminer un développement en série entière de la fonction  $f$  et préciser le rayon de convergence.



On en déduit en substituant  $x$  par  $x^2$  que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

## Ex 8

## Développement d'une fonction usuelle en série entière

6YTv

À l'aide des développements en séries entières des fonctions usuelles, calculer les développements

en séries entières en 0 des fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+3x}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et déterminer le rayon de convergence de ces développements.



On écrit les développements sur l'intervalle  $] -R; R[$  où  $R$  est le rayon de convergence :

$$\begin{aligned} \text{— } \forall x \in \left] -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right[ , \quad f(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{3}{2}x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}x\right)^n \\ \text{— } \forall x \in ] -1; 1[ , \quad g(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} x^n = \\ &\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1} \\ \text{— } \forall x \in ] -1; 1[ , \quad h(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \left( \frac{1}{2} + n - 1 \right) \right) x^{2n} \end{aligned}$$