

Séries numériques



Version web

Ex 1

Séries divergentes

tPpR

★ ★

En examinant la limite du terme général, montrer que les séries suivantes divergent :

i

Si le terme général u_n ne converge pas vers 0 alors par théorème du cours, $\sum u_n$ est une série divergente.

1. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + (-1)^n \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) ;$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1 + n^{-1}} ;$
3. $\sum_{n \geq 1} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n - 1 \right).$

i

Utiliser un développement limité de $\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$ pour déterminer la limite de $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.

Ex 2

Série télescopique

Jfwq

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - 1}$ en éléments simples, c'est-à-dire chercher des réels a et b tels que :

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n - 1} + \frac{b}{n + 1}.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et calculer sa somme.

i

Écrire la somme partielle et observer les simplifications.

Ex 3

Nature de séries

na3z

Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ suivantes et préciser la somme de la série quand celle-ci est convergente.

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, n_0 = 0$
2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n_0 = 2$

i On peut remarquer que $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$.

3. $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, n_0 = 0$
4. $u_n = \frac{1}{3^n}, n_0 = 0$
5. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, n_0 = 3$

i On peut décomposer la fraction en éléments simples, i.e. chercher a, b et c des réels tels que $\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$.

Ex 4**Séries à termes réels positifs**

cEVS

★ ★

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
6. $u_n = \frac{(-1)^{n+n}}{n^2+1}$
7. $u_n = \frac{1}{n!}$
8. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

i utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

i utiliser l'inégalité $n! \geq 2^{n-1}$.

i utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.

Ex 5**Séries de même nature via un équivalent**

mN4p

★ ★ ★

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Montrer que $0 \leq v_n < 1$ pour tout n , et que $v_n \leq u_n$.
2. Montrer que si $u_n \rightarrow 0$, alors $v_n \sim u_n$, et en déduire que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

i Utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

3. Montrer que si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. Montrer également que v_n ne converge pas vers 0 et en déduire que la série $\sum v_n$ diverge.
4. Conclure : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Ex 6

Séries de Bertrand

vRme

★ ★ ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

qui s'appelle une série de Bertrand. Sa convergence dépend des valeurs prises par α et β .

1. Supposons que $\alpha > 1$ (β est quelconque). On pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
 - (a) Vérifier que $\gamma < \alpha$. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$?
 - (b) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = 0$.
 - (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
2. Supposons que $\alpha < 1$: calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$ et conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
3. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe un rang N à partir duquel pour tout $n \geq N$ alors $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geq 1$.
 - (b) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
4. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Pour tout $x > 1$, On pose $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ de sorte que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq 2$.
 - (a) Vérifier que f est positive et décroissante sur $]1 + \infty[$.
 - (b) On considère l'intégrale

$$I = \int_2^{+\infty} f(t) dt$$

En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, montrer que I est une intégrale convergente si et seulement si $\beta > 1$.

- (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Ex 7

Critère de D'Alembert

rVaz

★ ★

On définit les deux suites suivantes pour tout n entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

On s'intéresse à la nature de la série de terme général u_n et de la série de terme général v_n .

1. Appliquer le critère de d'Alembert à ces deux séries. Que peut-on conclure sur la nature des séries de terme général u_n et v_n ?
2. En comparant la série de terme général v_n à une série usuelle, déterminer sa nature.

Ex 8

Critère de Cauchy

UHns

★ ★

En utilisant le critère de Cauchy, déterminer la nature de la série dont le terme général est défini par : $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n$.

Ex 9

Étude d'une série à termes positifs

BZWM

★ ★

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Ex 10

Étude de séries numériques (1)

mK4p

★ ★

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente ou grossièrement divergente.



Pour montrer qu'une série est semi-convergente, deux démonstrations sont nécessaires : montrer que $\sum u_n$ converge, et que $\sum |u_n|$ diverge.

$$1. \quad u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$$

$$2. \quad u_n = \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$

$$3. \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$4. \quad u_n = \frac{n}{2^n}$$

$$5. \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$6. \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$7. \quad u_n = \ln(1 + e^{-n})$$

$$8. \quad u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$$

$$9. \quad u_n = \frac{\ln(n)}{n}$$

Ex 11

Étude de séries numériques (2)

Rz9w

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente ou grossièrement divergente.

1. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

i Commencer par étudier la convergence absolue, puis appliquer le critère des séries alternées à la suite $(\frac{\ln n}{n})$.

2. $u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln(n)}$

i Remarquer que $|\cos(n^2\pi)| = 1$ pour tout n , puis conclure par comparaison à une série de Bertrand.

3. $u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)}$

i Chercher une minoration de u_n en termes de $\frac{1}{n}$.

4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2 + 1}{n} \pi\right)$

i Décomposer $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$ puis utiliser la formule $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin(\theta)$.

5. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$

i Calculer $(|u_n|)^{1/n}$ et appliquer le critère de Cauchy.

6. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

i Effectuer un développement limité du cosinus en 0 à l'ordre 2.

7. $u_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$

8. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

i Décomposer en éléments simples pour calculer explicitement les sommes partielles.

Ex 12

Calcul de sommes

yp7e

On admet que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

1. En déduire la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.

i Faire un changement d'indice dans la somme pour faire apparaître la somme connue.

2. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

i On peut décomposer en deux sommes et utiliser le résultat de la question précédente.

3. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{n!}$

4. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$