

Séries numériques



Version web

Ex 1

Séries divergentes

tPpR

★ ★

En examinant la limite du terme général, montrer que les séries suivantes divergent :

1. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + (-1)^n \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) ;$



On pose $u_n = (1 + (-1)^n \cos(\frac{1}{n}))$: alors $u_{2n} = 1 + \cos(\frac{1}{n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim u_n \neq 0$ donc la série est divergente.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1 + n^{-1}} ;$



On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + n^{-1}}$: alors $u_{2n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim u_n \neq 0$ donc la série est divergente.

3. $\sum_{n \geq 1} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n - 1 \right).$



Contrairement aux apparences, le terme général ne tend pas vers 0. En effet :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ donc } \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})}.$$

$$\text{Or } \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n+1} \text{ donc } n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1.$$

Par composition de limites, on en déduit que $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$. Donc la série est divergente.

Ex 2

Série télescopique

Jfwq

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - 1}$ en éléments simples, c'est-à-dire chercher des réels a et b tels que :

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n - 1} + \frac{b}{n + 1}.$$



On remarque que

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2(n - 1)} - \frac{1}{2(n + 1)}$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et calculer sa somme.



On écrit la somme partielle :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} - \left(\sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Donc la série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

Ex 3

Nature de séries

na3z

Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ suivantes et préciser la somme de la série quand celle-ci est convergente.

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$



C'est une série géométrique de raison $q = \frac{3}{2} > 1$ donc une série divergente.

2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n_0 = 2$



On écrit la somme partielle :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) \\
 &= \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - \ln(k-1)) \\
 &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2
 \end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ est convergente et sa somme vaut $-\ln(2)$.

3. $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$



C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$ et $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{2}{1-i}$.

4. $u_n = \frac{1}{3^n}$, $n_0 = 0$



C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{3} < 1$ donc c'est une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{2}$.

5. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$, $n_0 = 3$



On trouve dans un premier temps que $u_n = \frac{1}{4n} - \frac{5}{8(n+2)} + \frac{3}{8(n-2)}$. On écrit la somme partielle pour $n \geq 3$ (les termes de la série ne sont pas bien définis pour $n \leq 2$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n u_k &= \sum_{k=3}^n \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)} + \frac{3}{8(k-2)} \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{1}{4k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{8k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8k} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4n} - \sum_{k=n-1}^{n+2} \frac{5}{8k} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{24} + \frac{3}{32} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{89}{96} \end{aligned}$$

Ex 4

Séries à termes réels positifs

cEVS

★ ★

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

3. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 < 1$), la série $\sum u_n$ diverge.

5. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \times 2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

6. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 < 1$), la série $\sum u_n$ diverge.

7. $u_n = \frac{1}{n!}$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc par comparaison à une série géométrique convergente ($q = \frac{1}{2} < 1$), la série $\sum u_n$ converge.

8. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$



Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

Ex 5

Séries de même nature via un équivalent

mN4p

★ ★ ★

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Montrer que $0 \leq v_n < 1$ pour tout n , et que $v_n \leq u_n$.



Puisque $u_n \geq 0$, on a $1+u_n \geq 1 > 0$, donc $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \geq 0$. De plus $u_n < 1+u_n$, donc $v_n < 1$.
Enfin, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$ car $\frac{1}{1+u_n} \leq 1$.

2. Montrer que si $u_n \rightarrow 0$, alors $v_n \sim u_n$, et en déduire que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.



Si $u_n \rightarrow 0$, alors $1 + u_n \rightarrow 1$, donc

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

ce qui signifie $v_n \sim u_n$. Comme $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs garantit que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. Montrer que si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. Montrer également que v_n ne converge pas vers 0 et en déduire que la série $\sum v_n$ diverge.



Si $u_n \not\rightarrow 0$, la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite, donc $\sum u_n$ diverge. Par ailleurs, on peut écrire

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n} = 1 - \frac{1}{1 + u_n}.$$

Si $u_n \not\rightarrow 0$, alors $\frac{1}{1 + u_n} \not\rightarrow 1$, donc $v_n \not\rightarrow 0$. La condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite pour $\sum v_n$ non plus, donc $\sum v_n$ diverge.

4. Conclure : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.



D'après les questions précédentes :

- si $u_n \rightarrow 0$, les deux séries sont de même nature par équivalence (question 2) ;
- si $u_n \not\rightarrow 0$, les deux séries divergent (question 3).

Dans tous les cas, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes : elles sont de même nature.

Ex 6

Séries de Bertrand

★ ★ ★ ★

vRme

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

qui s'appelle une série de Bertrand. Sa convergence dépend des valeurs prises par α et β .

1. Supposons que $\alpha > 1$ (β est quelconque). On pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

- (a) Vérifier que $\gamma < \alpha$. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$?



On observe que $\alpha > 1$ d'où $2\alpha = \alpha + \alpha > 1 + \alpha = 2\gamma$ d'où $\alpha > \gamma$. De plus, $\alpha > 1$ d'où $1 + \alpha > 2$ d'où $\frac{1+\alpha}{2} = \gamma > 1$.

- (b) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = 0$.



Si $\beta \geq 0$ alors on peut majorer $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où le résultat.
Enfin, si $\beta < 0$ alors par croissances comparées, $\frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.



Donc par définition, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ or $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série convergente donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est également une série convergente.

2. Supposons que $\alpha < 1$: calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ et conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.



Si $\alpha < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} = +\infty$ donc à partir d'un certain rang, $nu_n \geq 1$ donc $u_n \geq \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 > 0$), la série $\sum u_n$ diverge.

3. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$.

- (a) Montrer qu'il existe un rang N à partir duquel pour tout $n \geq N$ alors $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geq 1$.



Si $\beta \leq 0$ alors $(\ln(n))^{-\beta} \geq 1$ pour tout $n \geq 3$ donc à partir du rang $N = 3$, $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geq 1$.

- (b) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.



On en déduit que $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq N = 3$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 > 0$), la série $\sum u_n$ diverge.

4. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Pour tout $x > 1$, On pose $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ de sorte que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq 2$.

- (a) Vérifier que f est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$.



On a $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ et $\ln(x) > 0$ pour tout $x > 1$ donc $(\ln(x))^{\beta-1} > 0$ pour tout $x > 1$ donc f est positive sur $]1, +\infty[$.
De plus, $f'(x) = \frac{-\ln(x)^{\beta-1} - \beta x \ln(x)^{\beta-2}}{x^2 \ln(x)^{2\beta}} = \frac{-\ln(x)^{\beta-1} (\ln(x) + \beta x)}{x^2 \ln(x)^{2\beta}}$ et $\ln(x) + \beta x > 0$ pour tout $x > 1$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > 1$ donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

- (b) On considère l'intégrale

$$I = \int_2^{+\infty} f(t) dt$$

En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, montrer que I est une intégrale convergente si et seulement si $\beta > 1$.



On pose $u = \ln(t)$ de sorte que $du = \frac{dt}{t}$ et $t = e^u$ donc

$$I = \int_2^{+\infty} f(t)dt = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u \ln(e^u)^\beta} e^u du = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u u^\beta} e^u du = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$$

Or $\beta > 1$ donc $\beta - 1 > 0$ donc par théorème de comparaison à une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \beta - 1 > 0$), l'intégrale I est convergente.

Réciproquement, si $\beta \leq 1$ alors $\beta - 1 \leq 0$ donc par théorème de comparaison à une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = \beta - 1 \leq 0$), l'intégrale I est divergente.

- (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.



Par théorème de comparaison série intégrale, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale I converge donc par la question précédente, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Ex 7

Critère de D'Alembert

rVaz

★ ★

On définit les deux suites suivantes pour tout n entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

On s'intéresse à la nature de la série de terme général u_n et de la série de terme général v_n .

1. Appliquer le critère de d'Alembert à ces deux séries. Que peut-on conclure sur la nature des séries de terme général u_n et v_n ?



On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)(n+3)\dots(2n+2)}{(2n+2)^{n+1}} \times \frac{(2n)^n}{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \times \left(\frac{2n}{2n+2} \right)^n \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{1}{e} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{e} < 1 \end{aligned}$$

donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

Pour la deuxième série, on a $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ est indéterminée.

2. En comparant la série de terme général v_n à une série usuelle, déterminer sa nature.



On a $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum v_n$ diverge.

Ex 8

Critère de Cauchy

UHns

★ ★

En utilisant le critère de Cauchy, déterminer la nature de la série dont le terme général est défini par : $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.



On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} (u_n)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n \times \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

donc par le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ converge.

Ex 9

Étude d'une série à termes positifs

BZWM

★ ★

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.



La suite (u_n) est positive. Calculons le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n!} \times \frac{n-1!}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

Par la règle de d'Alembert la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Ex 10

Étude de séries numériques (1)

mK4p

★ ★

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente ou grossièrement divergente.

1. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$



La série est **absolument convergente** : le terme général vérifie $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (paramètre $2 > 1$).

2. $u_n = \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$



Série à termes positifs. On a $u_n \sim \frac{16}{7^3 n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente de paramètre 2. Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

3. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$



$u_n \rightarrow e^{-1} \neq 0$ donc $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

4. $u_n = \frac{n}{2^n}$



Série à termes positifs. Par le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1.$$

Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

5. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$



$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1$ donc (u_n) ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

6. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$



$|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, terme général d'une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Par le critère des séries alternées, $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est décroissante de limite 0, donc $\sum u_n$ converge.

Conclusion : $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

7. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$



Série à termes positifs. On a $u_n \sim e^{-n}$, terme général d'une série géométrique convergente (raison $e^{-1} < 1$). Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

8. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$



Par le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

9. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$



Série à termes positifs. Comme $u_n \geq \frac{1}{n}$, par comparaison à la série harmonique divergente, $\sum u_n$ **diverge**.

Ex 11

Étude de séries numériques (2)

Rz9w

★ ★ ★

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente ou grossièrement divergente.

1. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$



$|u_n| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument (comparaison à la série harmonique). Par le critère des séries alternées, $(\frac{\ln n}{n})$ est décroissante et tend vers 0, donc $\sum u_n$ converge. Conclusion : $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

2. $u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln(n)}$



On a $|u_n| = \frac{1}{n \ln n}$, terme général d'une série de Bertrand convergente (paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 1$). Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

3. $u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)}$



Pour tout n , $\cos^2(n) \leq 1$ donc $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$. Par comparaison à la série harmonique divergente, $\sum u_n$ **diverge**.

4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2 + 1}{n} \pi\right)$



On réécrit :

$$u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Comme $|u_n| \sim \frac{\pi}{n}$, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Par le critère des séries alternées, $(\sin \frac{\pi}{n})$ est décroissante de limite 0, donc $\sum u_n$ converge.

Conclusion : $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

5. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$



Par le critère de Cauchy : $(|u_n|)^{1/n} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0 < 1$. Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

6. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$



Par développement limité : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

7. $u_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$



$u_n \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$, donc (u_n) ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

8. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$



$u_n \sim \frac{1}{n^3}$, série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**.
Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Les sommes partielles donnent :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

La somme de la série vaut $\frac{1}{4}$.

Ex 12

Calcul de sommes

★ ★ ★

yp7e

On admet que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

1. En déduire la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.



$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} &= \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{1}{n'!} \\ &= e \end{aligned}$$

2. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$



On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
 &= 2e
 \end{aligned}$$

3. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{n!}$



On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

4. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$



On simplifie :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1) + n-1 + 1}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{n}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{n-2+2}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \\
 &= 5e
 \end{aligned}$$