

Analyse asymptotique



Version web

Ex 1

Equivalents : vrai ou faux

dmDL

1. $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$



Vrai. En effet, par définition, $f(x) \sim g(x)$ lorsque

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1.$$

Ici,

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } x \longrightarrow +\infty.$$

2. $x^2 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$



Faux. On a :

$$\frac{x^2 - x}{x} = x - 1,$$

et puisque $x - 1 \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$, le rapport ne tend pas vers 1.

3. $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(10^6 x)$



Vrai. En utilisant la propriété logarithmique,

$$\ln(10^6 x) = \ln(10^6) + \ln(x),$$

on obtient :

$$\frac{\ln(10^6 x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(10^6)}{\ln(x)} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } x \longrightarrow +\infty.$$

4. $x^2 + 2x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 + 2x$



Vrai. En divisant numérateur et dénominateur par x^2 , on trouve :

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x} = \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } x \longrightarrow +\infty.$$

5. $\sqrt{x+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$



Vrai. Par développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, on a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots,$$

ce qui implique que

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } x \longrightarrow 0.$$

6. $x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$



Faux. En effet,

$$\frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

7. $e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x+10^6}$



Faux. On a :

$$\frac{e^x}{e^{x+10^6}} = e^{-10^6} \neq 1,$$

car e^{-10^6} est une constante strictement inférieure à 1.

8. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^{2x}$



Vrai. En effet,

$$\frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } x \longrightarrow 0.$$

9. $\frac{6x^3+2x}{2x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2$



Vrai. Pour $x \longrightarrow +\infty$, les termes dominants sont $6x^3$ au numérateur et $2x$ au dénominateur. Ainsi,

$$\frac{6x^3+2x}{2x+1} \sim \frac{6x^3}{2x} = 3x^2.$$

10. $\frac{6x^3+2x}{2x+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$



Vrai. Lorsque $x \longrightarrow 0$, on a :

$$6x^3 + 2x \sim 2x \quad \text{et} \quad 2x + 1 \sim 1,$$

donc :

$$\frac{6x^3+2x}{2x+1} \sim 2x.$$

A faire sur Moodle

Ex 2

Equivalents simples

zmLP

Trouver un équivalent simple pour chaque fonction suivante :

1. $\frac{x^2+2x+1}{x^3+x+2}$ en 0



Réponse : $\frac{1}{2}$

Lorsque $x \rightarrow 0$, le numérateur tend vers $(0)^2+2(0)+1 = 1$ et le dénominateur vers $(0)^3+(0)+2 = 2$. Donc la fonction est équivalente à $\frac{1}{2}$ en 0.

2. $\frac{(x+1)^3}{(2x^4-3x^2+5)^2}$ en $+\infty$



Réponse : $\frac{1}{4x^5}$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $(x+1)^3 \sim x^3$ et $(2x^4-3x^2+5)^2 \sim (2x^4)^2 = 4x^8$. Donc la fonction est équivalente à $\frac{x^3}{4x^8} = \frac{1}{4x^5}$.

3. $\sin x + \cos x$ en 0



Réponse : 1

En 0, $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$. Plus précisément, $\sin x \sim x$ et $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ en 0, donc $\sin x + \cos x \sim 1$ car le terme constant est dominant.

4. $\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$ en $+\infty$



Réponse : 1

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $\frac{1}{x^2} + 1 \sim 1$. Par continuité de la racine carrée, $\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \sim \sqrt{1} = 1$.

5. $1 - e^x$ en 0



Réponse : $-x$

En développant e^x en 0 : $e^x = 1 + x + o(x)$. Donc $1 - e^x = 1 - (1 + x + o(x)) = -x + o(x)$.

6. $1 - e^{\frac{1}{x^2}}$ en $+\infty$



Réponse : $-\frac{1}{x^2}$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$. En posant $t = \frac{1}{x^2}$, on a $e^t = 1 + t + o(t)$. Donc $1 - e^{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

7. $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$



Réponse : 1

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. En posant $t = \frac{1}{x}$, on a $\sin(t) \sim t$. Donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

8. $\frac{\sqrt{x}+1}{2x^2+x}$ en $+\infty$



Réponse : $\frac{1}{2x^{3/2}}$

Pour $x \rightarrow +\infty$, les termes dominants sont $\sqrt{x}$ au numérateur et $2x^2$ au dénominateur. Donc $\frac{\sqrt{x}+1}{2x^2+x} \sim \frac{\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{3/2}}$.

9. $\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ en $+\infty$



Réponse : 1

Pour $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$. Avec $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on a $\ln(1+t) \sim t$. Donc $\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \sim \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

10. $e^x + \sin(x^3)$ en 0



Réponse : 1

En 0, $e^0 = 1$ et $\sin(0) = 0$. Plus précisément, $e^x \sim 1+x$ et $\sin(x^3) \sim x^3$ au voisinage de 0. Donc $e^x + \sin(x^3) \sim 1$.

11. $\ln(\cos(x))$ en 0



Réponse : $-\frac{x^2}{2}$

Développons $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ en 0. En utilisant $\ln(1+t) \sim t$ pour t proche de 0 et en posant $t = \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, on obtient $\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2}$.

Ex 3

Equivalents simples

9Acu

Trouver un équivalent simple pour chaque fonction suivante :

1. $\frac{3x^2-x+4}{2x^3+5x+7}$ en 0



Réponse : $\frac{4}{7}$

Lorsque $x \rightarrow 0$, le numérateur tend vers $3(0)^2 - (0) + 4 = 4$ et le dénominateur vers $2(0)^3 + 5(0) + 7 = 7$. Donc la fonction est équivalente à $\frac{4}{7}$ en 0.

2. $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ en $+\infty$



Réponse : 1

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \sim 1$. Par continuité de la racine carrée, $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \sim \sqrt{1} = 1$.

3. $e^x - 1 - x$ en 0



Réponse : $\frac{x^2}{2}$

En développant e^x en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

4. $\ln(1 + \frac{1}{x^4})$ en $+\infty$



Réponse : $\frac{1}{x^4}$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x^4} \rightarrow 0$. En posant $t = \frac{1}{x^4}$, on a $\ln(1+t) \sim t$ pour t proche de 0. Donc $\ln(1 + \frac{1}{x^4}) \sim \frac{1}{x^4}$.

5. $\frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ en 0



Réponse : $\frac{1}{6}$

Développons $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ en 0. Donc $\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{6} - x(1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Ainsi, $\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \sim \frac{1}{3}$.

6. $\frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{3x^3 - x^2}$ en $+\infty$



Réponse : $\frac{1}{3}$

Pour $x \rightarrow +\infty$, les termes dominants sont x^3 au numérateur et $3x^3$ au dénominateur. Donc $\frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{3x^3 - x^2} \sim \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$.

Ex 4

Equivalents simples

eDzQ

Trouver un équivalent simple quand $n \rightarrow +\infty$ pour chaque suite définie par son terme général ci-dessous :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$



$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, car $n^2 - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$.

2. $u_n = n + 1 + \ln(n)$



$n + 1 + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1+\ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times (1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} = 1$.

3. $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$



$\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$



On a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$
 et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ Aussi :}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

5. $u_n = \ln \left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1} \right)$



$$\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1} = \frac{n^2 \times \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2} = 1 + 3u^2 + u^2 \cdot \varepsilon(u)$$

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + v^2 \cdot \varepsilon(v) \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} \ln \left(\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2} \right) = 3u^2 + u^2 \cdot \varepsilon(u)$$

$$\text{Ainsi : } \ln \left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1} \right) = \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \text{ ou encore } \ln \left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$$

Ex 5

Développement limité

aWAS

1. Donner le développement limité de e^x et de $\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.



On prend d'abord les développements usuels :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot \varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot \varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2. En déduire le développement limité de $e^x \sin(x)$ à l'ordre 3.



On effectue le produit $\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ en ne conservant que les termes de degré ≤ 3 :

$$\begin{aligned} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) &= 1 \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x \times (x) + \frac{x^2}{2} \times (x) + \dots \\ &= x + x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \dots \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } e^x \cdot \sin(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

Ex 6

Développement limité

ZTjz

Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. En déduire le développement limité de $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 3.



$$\ln(1+x) = x - \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{P_1(x)} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}(P_3(x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \\&= x \times \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} \times x + o(x^3) \\&= x^2 - x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } (\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) = x^2 - x^3 + o(x^3)$$