

Révision



Version web

Ex 1

Représentation graphique de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

aB3x

★

Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des ouverts ? Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
2. $B = [0, 1] \times [0, 1]$
3. $C =]0, 1[\times]0, 1[$
4. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
5. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
6. $F =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$
7. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
8. $H = (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times \mathbb{R}_+^*$
9. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

Ex 2

Limite et continuité en un point

Qm7T

★ ★

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} f(x,y) = 6.$$

1. Peut-on dire que $f(3, 1) = 6$?
2. Si f est continue en $(3, 1)$, peut-on dire que $f(3, 1) = 6$?
3. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 1$, peut-on dire que $f(3, 1) = 6$?
4. Si f est différentiable en $(3, 1)$, peut-on dire que $f(3, 1) = 6$?
5. Si f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, peut-on dire que $f(3, 1) = 6$?

Ex 3

Calcul de limite en l'origine par coordonnées polaires

r2Kp

★ ★ ★

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \frac{x^2 + 3y^3}{|x| + |y|}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g .

2. Démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} g(h, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(0, h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h, h)$.
3. On admet que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\cos \theta| + |\sin \theta| \geq 1$. Déterminer une fonction m ne dépendant pas de θ telle que pour tout $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{r|\cos \theta| + r|\sin \theta|} \leq m(r).$$

4. Déterminer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$.



Passer en coordonnées polaires et utiliser la majoration établie à la question précédente.

Ex 4

Continuité, lignes de niveau et points critiques de $f(x, y) = x^2y$

Pz5W

★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lignes de niveau de f .
3. Quels sont les points critiques de f ?

Ex 5

Domaine de définition et lignes de niveau

Hn9L

★ ★

On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5y - 2x}}{\ln(x - 1)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer la ligne de niveau $k = 0$ de f .

Ex 6

Dérivée partielle via la règle de dérivation composée

Vk4D

★ ★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t, t^2) = 1$. En utilisant la dérivée de la composée, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Ex 7

Prolongement continu et dérivées partielles en l'origine

Lf8C

★ ★ ★

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

1. Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Ex 8

Continuité et dérivées partielles de $f(x, y) = y^2 \ln |x|$

Td5F

★ ★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = y^2 \ln |x| \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Cette fonction est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

Ex 9

Étude de la classe $\mathcal{C}^1$ de $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$

Um8A

★ ★ ★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ par la définition (taux d'accroissement).
3. Étudier la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Ex 10

Étude de la classe $\mathcal{C}^1$ de $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$

Rp7E

★ ★ ★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Ex 11

Étude de la différentiabilité de $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Ob2N

★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$?
2. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Ex 12

Continuité, dérivées partielles et non-différentiabilité en l'origine

Ks9H

★★★★

On donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, et que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

1. Continuité en $(0, 0)$.
2. Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$.
3. Non-différentiabilité en $(0, 0)$.

Ex 13

Identification de graphes de fonctions

Zy4V

★★

Un élève a collecté les graphes de fonctions des exercices précédents mais ne se souvient plus à quel exercice correspond chaque graphe. Pour chacune des figures suivantes, donner le numéro de l'exercice contenant la fonction correspondante.

1. Figure 1.
2. Figure 2.
3. Figure 3.
4. Figure 4.