

Révision



Version web

Ex 1

★ Représentation graphique de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

aB3x

Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des ouverts ? Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

 A est ouvert.

2. $B = [0, 1] \times [0, 1]$

 B est fermé.

3. $C =]0, 1[\times]0, 1[$

 C est ouvert.

4. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

 D est ouvert.

5. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

 E est fermé.

6. $F =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$

 F est ouvert.

7. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

 G est ouvert.

8. $H = (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times \mathbb{R}_+^*$

 H est ouvert.

9. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

 I est fermé.

Ex 2

Limite et continuité en un point

Qm7T

★ ★

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} f(x,y) = 6.$$

1. Peut-on dire que $f(3,1) = 6$?



Non. Il faudrait pour cela que f soit continue en $(3,1)$, ce qui n'est pas précisé.

2. Si f est continue en $(3,1)$, peut-on dire que $f(3,1) = 6$?



Oui, par définition de la continuité en $(3,1)$, on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} f(x,y) = f(3,1)$.

3. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 1$, peut-on dire que $f(3,1) = 6$?



Non. L'existence de dérivées partielles en $(3,1)$ n'implique pas que f soit continue en $(3,1)$.

4. Si f est différentiable en $(3,1)$, peut-on dire que $f(3,1) = 6$?



Oui. Une fonction différentiable en $(3,1)$ est continue en $(3,1)$ d'après le cours.

5. Si f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, peut-on dire que $f(3,1) = 6$?



Oui. D'après le cours, une fonction $\mathcal{C}^1$ est continue.

Ex 3

Calcul de limite en l'origine par coordonnées polaires

r2Kp

★ ★ ★

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \frac{x^2 + 3y^3}{|x| + |y|}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g .



L'expression $g(x,y)$ est définie si et seulement si $|x| + |y| \neq 0$. Or $|x| + |y| = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.
Par conséquent, $D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} g(h,0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(0,h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h,h)$.



Pour $h \neq 0$:

$$g(h, 0) = \frac{h^2}{|h|} = |h|, \quad g(0, h) = \frac{3h^3}{|h|} = 3h^2 \text{ si } h > 0 \text{ (et } -3h^2 \text{ si } h < 0),$$

$$g(h, h) = \frac{h^2 + 3h^3}{2|h|} = \frac{1}{2}(g(h, 0) + g(0, h)).$$

Ces trois expressions tendent vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

3. On admet que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\cos \theta| + |\sin \theta| \geq 1$. Déterminer une fonction m ne dépendant pas de θ telle que pour tout $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{r|\cos \theta| + r|\sin \theta|} \leq m(r).$$



Puisque $|\cos \theta| + |\sin \theta| \geq 1$, on a $\frac{1}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq 1$. En divisant par $r > 0$:

$$\frac{1}{r|\cos \theta| + r|\sin \theta|} \leq \frac{1}{r}.$$

On peut donc prendre $m(r) = \frac{1}{r}$.

4. Déterminer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$.



On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. D'après la question précédente :

$$|g(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{|r^2 \cos^2 \theta + 3r^3 \sin^3 \theta|}{r|\cos \theta| + r|\sin \theta|} \leq \frac{|r^2 \cos^2 \theta + 3r^3 \sin^3 \theta|}{r}.$$

En simplifiant par r et par inégalité triangulaire :

$$|g(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq r|\cos^2 \theta| + 3r^2|\sin^3 \theta| \leq r + 3r^2.$$

Puisque $r + 3r^2 \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$, on conclut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$.

Ex 4

Continuité, lignes de niveau et points critiques de $f(x, y) = x^2y$

Pz5W

★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.



La fonction f est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$, donc est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les lignes de niveau de f .



Soit $k \in \mathbb{R}$. On résout $x^2y = k$. La courbe de niveau k est la courbe d'équation $y = \frac{k}{x^2}$ avec $x \neq 0$.

3. Quels sont les points critiques de f ?



On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$. Le système $\nabla f = 0$ donne $x^2 = 0$ et $2xy = 0$, soit $x = 0$. L'ensemble des points critiques est $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Ex 5

Domaine de définition et lignes de niveau

Hn9L

★ ★

On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5y - 2x}}{\ln(x - 1)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .



L'expression $f(x, y)$ est définie si et seulement si :

- $x > 1$ (pour que $\ln(x - 1)$ soit bien défini),
- $5y - 2x \geq 0$ (pour que $\sqrt{5y - 2x}$ soit bien définie),
- $\ln(x - 1) \neq 0$, i.e. $x \neq 2$ (pour que le quotient soit bien défini).

Donc :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, 5y - 2x \geq 0, x \neq 2\}.$$

2. Déterminer la ligne de niveau $k = 0$ de f .



$f(x, y) = 0$ si et seulement si $\sqrt{5y - 2x} = 0$, soit $5y = 2x$, i.e. $y = \frac{2}{5}x$. En tenant compte du domaine, la courbe de niveau 0 est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{5}x, x > 1, x \neq 2\}.$$

Il s'agit de l'union d'un segment et d'une demi-droite.

Ex 6

Dérivée partielle via la règle de dérivation composée

Vk4D

★ ★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, t^2) = 1$. En utilisant la dérivée de la composée, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.



On pose $\varphi(t) = f(t, t^2)$. Par la règle de dérivation composée :

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(t, t^2).$$

Comme $\varphi(t) = 1$ pour tout t , on a $\varphi'(t) = 0$, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(t, t^2) = 0.$$

En particulier pour $t = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Ex 7

Prolongement continu et dérivées partielles en l'origine

Lf8C

★ ★ ★

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

- Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.



On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Alors :

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^{3/2}} = r^{1/2} \cos^2 \theta.$$

Ainsi $|f(x, y)| \leq r^{1/2} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, et on prolonge f en posant $f(0, 0) = 0$.

- Étudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.



On a $f(x, 0) = \sqrt{|x|}$ pour $x \neq 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

En revanche, $f(0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Ex 8

Continuité et dérivées partielles de $f(x, y) = y^2 \ln |x|$

Td5F

★ ★ ★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = y^2 \ln |x| \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

- Cette fonction est-elle continue en $(0, 0)$?



Non. Considérons la suite $u_n = (e^{-n^2}, \frac{1}{n})$, qui tend vers $(0, 0)$. On a $f(u_n) = \frac{1}{n^2} \ln e^{-n^2} = -1 \rightarrow -1 \neq f(0, 0)$. Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?



Pour $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$: on a $f(h, 0) = 0$ pour $h \neq 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$.
La dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ n'existe pas, car $f(0, y)$ n'est pas définie pour $y \neq 0$ ($\ln |0|$ est indéfini).

Ex 9

Étude de la classe $\mathcal{C}^1$ de $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$

Um8A

★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x, y) \neq (0, 0)$.



$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^2 y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y^3}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ par la définition (taux d'accroissement).



On a $f(h, 0) = 0$ et $f(0, h) = 0$ pour $h \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

3. Étudier la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$.



En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 4r^3 |\ln r| + 2r^3.$$

Par croissances comparées, $r^3 |\ln r| \rightarrow 0$ et $r^3 \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

Le raisonnement est identique pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$, puis $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$.

Ex 10

Étude de la classe $\mathcal{C}^1$ de $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$

Rp7E

★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x, y) \neq (0, 0)$.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.



Pour $h \neq 0$, $f(h, 0) = e^{-1/h^2}$. Par croissances comparées, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

3. Étudier la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$.



En coordonnées polaires :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \frac{2|\cos \theta|}{r^3} e^{-1/r^2} \leq \frac{2}{r^3} e^{-1/r^2}.$$

Par croissances comparées, $\frac{1}{r^3} e^{-1/r^2} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$, et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 11

Étude de la différentiabilité de $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Ob2N

★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$?



Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cos \theta \sin^3 \theta,$$

qui dépend de θ et n'a donc pas de limite en $(0, 0)$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$, et f n'est pas C^1 en $(0, 0)$.

2. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?



On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Pour la différentiabilité, on étudie :

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r} = \cos^2 \theta \sin \theta,$$

qui dépend de θ . Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Ex 12

Continuité, dérivées partielles et non-différentiabilité en l'origine

Ks9H

★ ★ ★ ★

On donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, et que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

1. Continuité en $(0, 0)$.



En coordonnées polaires :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \sin^3 \theta).$$

Donc $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq 6r \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. f est continue en $(0, 0)$.

2. Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$.



$$f(h, 0) = h \text{ pour } h \neq 0, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$$f(0, h) = 3h \text{ pour } h \neq 0, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3.$$

3. Non-différentiabilité en $(0, 0)$.



Si f était différentiable en $(0, 0)$, on aurait

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - x - 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

En coordonnées polaires :

$$\frac{f(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \cos \theta - 3r \sin \theta}{r} = 2 \cos^2 \theta \sin \theta,$$

qui dépend de θ . Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Ex 13

Identification de graphes de fonctions

Zy4V

★ ★

Un élève a collecté les graphes de fonctions des exercices précédents mais ne se souvient plus à quel exercice correspond chaque graphe. Pour chacune des figures suivantes, donner le numéro de l'exercice contenant la fonction correspondante.

1. Figure 1.



Figure 1 : exercice 5. On reconnaît le domaine de définition et la courbe de niveau 0 de $f(x, y) = \frac{\sqrt{5y - 2x}}{\ln(x - 1)}$.

2. Figure 2.



Figure 2 : exercice 4. On reconnaît les points critiques formant l'axe $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ de $f(x, y) = x^2 y$.

3. Figure 3.



Figure 3 : exercice 8. On reconnaît le maximum ainsi que la courbe de niveau 0 de la fonction d'efficacité $E(x, y)$.

4. Figure 4.



Figure 4 : exercice 12. On reconnaît le minimum global de $f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.