

Optimisation



Version web

Ex 1

Extremum d'un polynôme

1H75



Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
2. Déterminer l'unique point critique (x_0, y_0) de f en résolvant le système $\nabla f(x, y) = \vec{0}$.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice Hessienne $H_f(x, y)$.
4. Déterminer la nature de ce point critique (minimum local, maximum local ou point selle). Calculer la valeur de l'extremum.
5. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 2

Etude de points critiques

PPFk

Soit la fonction f de deux variables x et y définie par

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Exprimer les équations des lignes de niveau k de cette fonction, en fonction des valeurs possibles de $k \in \mathbb{R}$.

Partie B

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f .
2. Exprimer la matrice hessienne de f .
3. Déterminer les points critiques de la fonction f .
4. Vérifier que la fonction f admet un maximum local au point $(0, 0)$ et donner la valeur de ce maximum. Peut-on dire que ce maximum est global ?

Ex 3

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

56tw

★★★★

On pose

$$f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).
3. Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ du plan, c'est-à-dire, le point $(-1, 0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1, 0)$ et de rayon ε .

Ex 4

Optimisation simple

kzF4

★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$$

1. Justifier (rapidement) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 5

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

H0fC

★★

Une usine produit deux types de matériaux, notés A et B . Si, en une semaine, elle produit x kg de type A et y kg de type B , le coût total de production (en euros) est modélisé par la fonction

$$c(x, y) = 10000 + 50x + 60y - 0.05xy.$$

En pleine capacité, la production hebdomadaire totale ne peut dépasser 3000 kg, c'est-à-dire que

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3000.$$

Dans ce modèle, le coût reste toujours positif.

1. Décrire et représenter graphiquement le domaine de définition $\mathcal{D}_c$.
2. Justifier que la fonction c admet un minimum sur $\mathcal{D}_c$ et que ce minimum est atteint.
3. Rechercher les points critiques (minimum ou maximum locaux) à l'intérieur du domaine de définition.
4. Étudier la fonction c sur le bord du domaine en substituant une variable en fonction de l'autre.

Ex 6

Etude d'extrema

XtkF

Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Pour tout $(x, y) \in K$, on pose

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur K .
2. En quels points sont-ils atteints ?

Ex 7

Etude d'extrema

zhwJ

★ ★ ★

On étudie la fonction de deux variables

$$f: (x, y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.
2. On pose $h(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$: déterminer l'ensemble de définition de h et étudier ses variations.
3. Démontrer que $\text{grad}_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$
4. En déduire l'ensemble des points stationnaires de f .
5. Déterminer l'ensemble des points extrémaux (locaux et globaux) de f .

Ex 8

Question d'optimisation

krLE

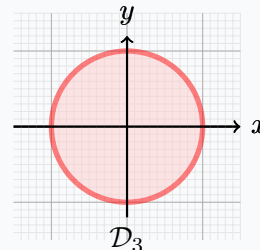
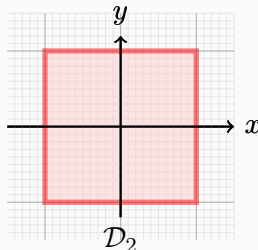
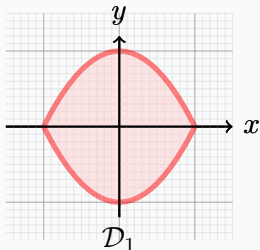
★ ★ ★

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Parmi les trois domaines représentés graphiquement ci-dessus, lequel est susceptible de représenter $\mathcal{D}$?



2. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? fermé dans $\mathbb{R}^2$? Justifier très brièvement.
3. Justifier que f admet un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{D}$.
4. Vérifier que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f dans l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$.

5. La fonction f admet-elle un extremum local sur l'intérieur de $\mathcal{D}$?
6. Pour tout $x \in [-1; 1]$, on pose $g(x) = f(x, 1 - x^2)$ et $h(x) = f(x, x^2 - 1)$.
 - (a) Simplifier les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.
 - (b) Étudier les variations des fonctions g et h sur l'intervalle $[-1; 1]$.
 - (c) En déduire l'existence et le calcul d'un minimum et d'un maximum de la fonction f sur le bord de $\mathcal{D}$.
7. En déduire la valeur du minimum global de f sur $\mathcal{D}$ et la valeur du maximum global de f sur $\mathcal{D}$.

Ex 9

Méthode des moindres carrés

Z6wd

★★★★

On considère des points $M_1, \dots, M_n$ de $\mathbb{R}^2$, et on note (x_i, y_i) les coordonnées de chaque point M_i .

1. On cherche les points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ approchant au mieux le nuage de points formé par les points M_i au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

On admet que f admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer en quels points f admet ce minimum.

2. On cherche maintenant une relation affine entre les abscisses et les ordonnées de ces points. On cherche des constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour cela, on introduit $d_i = y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point M_i par rapport à la droite.

La méthode des moindres carrés consiste à choisir m et q de telle sorte que la somme des écarts au carré soit minimale.

Exprimer m et q en fonction des coordonnées des points.