

Optimisation



Version web

Ex 1

Extremum d'un polynôme

1H75

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
2. Déterminer l'unique point critique (x_0, y_0) de f en résolvant le système $\nabla f(x, y) = \vec{0}$.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice Hessienne $H_f(x, y)$.
4. Déterminer la nature de ce point critique (minimum local, maximum local ou point selle). Calculer la valeur de l'extremum.
5. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?

①

Pour le minimum, vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire $f(x, y)$ sous la forme :

$$f(x, y) = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4} \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$$

Pour le maximum, étudier par exemple la limite de $f(x, 0)$ quand x tend vers l'infini.

Ex 2

Etude de points critiques

PPFk

Soit la fonction f de deux variables x et y définie par

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Exprimer les équations des lignes de niveau k de cette fonction, en fonction des valeurs possibles de $k \in \mathbb{R}$.

①

Constater que les lignes de niveau sont vides si $k < 3$.

Partie B

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f .
2. Exprimer la matrice hessienne de f .
3. Déterminer les points critiques de la fonction f .

4. Vérifier que la fonction f admet un maximum local au point $(0, 0)$ et donner la valeur de ce maximum. Peut-on dire que ce maximum est global ?

Ex 3

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

56tw

★★★★

On pose

$$f(x, y) = x(x + 1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).

i

On cherche l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0 \iff y^2 = x(x + 1)^2$.

3. Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ du plan, c'est-à-dire, le point $(-1, 0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1, 0)$ et de rayon ε .

Ex 4

Optimisation simple

kzF4

★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$$

1. Justifier (rapidement) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

i

On calcule la matrice Hessienne pour étudier les conditions du second ordre sur chaque point critique.

Ex 5

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

H0fC

★★

Une usine produit deux types de matériaux, notés A et B . Si, en une semaine, elle produit x kg de type A et y kg de type B , le coût total de production (en euros) est modélisé par la fonction

$$c(x, y) = 10000 + 50x + 60y - 0.05xy.$$

En pleine capacité, la production hebdomadaire totale ne peut dépasser 3000 kg, c'est-à-dire que

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3000.$$

Dans ce modèle, le coût reste toujours positif.

1. Décrire et représenter graphiquement le domaine de définition $\mathcal{D}_c$.
2. Justifier que la fonction c admet un minimum sur $\mathcal{D}_c$ et que ce minimum est atteint.
3. Rechercher les points critiques (minimum ou maximum locaux) à l'intérieur du domaine de définition.
4. Étudier la fonction c sur le bord du domaine en substituant une variable en fonction de l'autre.

Ex 6

Etude d'extrema

XtkF

Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Pour tout $(x, y) \in K$, on pose

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur K .
2. En quels points sont-ils atteints ?

Ex 7

Etude d'extrema

zhwJ

★ ★ ★

On étudie la fonction de deux variables

$$f: (x, y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.
2. On pose $h(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$: déterminer l'ensemble de définition de h et étudier ses variations.
3. Démontrer que $\text{grad}_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$
4. En déduire l'ensemble des points stationnaires de f .
5. Déterminer l'ensemble des points extrémaux (locaux et globaux) de f .

Ex 8

Question d'optimisation

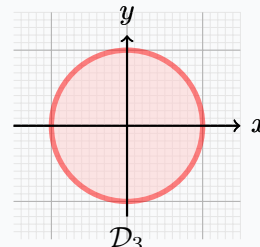
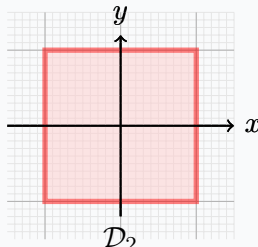
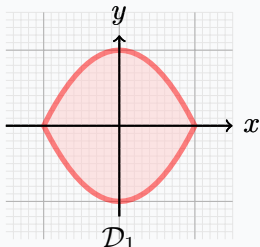
krLE

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Parmi les trois domaines représentés graphiquement ci-dessus, lequel est susceptible de représenter $\mathcal{D}$?



2. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? fermé dans $\mathbb{R}^2$? Justifier très brièvement.
3. Justifier que f admet un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{D}$.
4. Vérifier que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f dans l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$.
5. La fonction f admet-elle un extremum local sur l'intérieur de $\mathcal{D}$?
6. Pour tout $x \in [-1; 1]$, on pose $g(x) = f(x, 1 - x^2)$ et $h(x) = f(x, x^2 - 1)$.
- (a) Simplifier les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.
- (b) Étudier les variations des fonctions g et h sur l'intervalle $[-1; 1]$.
- (c) En déduire l'existence et le calcul d'un minimum et d'un maximum de la fonction f sur le bord de $\mathcal{D}$.
7. En déduire la valeur du minimum global de f sur $\mathcal{D}$ et la valeur du maximum global de f sur $\mathcal{D}$.

Ex 9

Méthode des moindres carrés

Z6wd

On considère des points $M_1, \dots, M_n$ de $\mathbb{R}^2$, et on note (x_i, y_i) les coordonnées de chaque point M_i .

1. On cherche les points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ approchant au mieux le nuage de points formé par les points M_i au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

On admet que f admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer en quels points f admet ce minimum.

i

On cherche les points stationnaires : on trouve un point stationnaire $(x, y) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i)$ et on reconnaît le point moyen du nuage de points. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un minimum local et qu'il est unique, c'est donc le minimum global.

2. On cherche maintenant une relation affine entre les abscisses et les ordonnées de ces

points. On cherche des constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour cela, on introduit $d_i = y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point M_i par rapport à la droite.

La méthode des moindres carrés consiste à choisir m et q de telle sorte que la somme des écarts au carré soit minimale.

Exprimer m et q en fonction des coordonnées des points.