

Optimisation



Version web

Ex 1

Extremum d'un polynôme

1H75

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.



La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et en particulier $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}^2$. On calcule le gradient de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y + 3$$

2. Déterminer l'unique point critique (x_0, y_0) de f en résolvant le système $\nabla f(x, y) = \vec{0}$.



On cherche (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x - 2 \\ x + 2(-2x - 2) + 3 = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne donne $-3x - 1 = 0 \implies x = -1/3$. On remplace x dans la première ligne : $y = -2(-1/3) - 2 = 2/3 - 6/3 = -4/3$. Le seul point critique est donc $A = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice Hessienne $H_f(x, y)$.



On calcule les dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

La matrice Hessienne est constante sur $\mathbb{R}^2$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer la nature de ce point critique (minimum local, maximum local ou point selle). Calculer la valeur de l'extremum.



On calcule le déterminant de la matrice Hessienne : $\det(H_f) = rt - s^2 = 2 \times 2 - 1^2 = 3$. Comme $\det(H_f) > 0$ et que le terme $r = 2 > 0$, il s'agit d'un **minimum local**. La valeur de ce minimum est $f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = -\frac{7}{3}$.

5. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?



Minimum global : On constate en écrivant $f(x, y)$ sous forme canonique que $(x + \frac{y}{2} + 1)^2 + \frac{3}{4}(y + \frac{4}{3})^2 \geq 0$ donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq -\frac{7}{3}$. D'après la question précédente, on en déduit que $-\frac{7}{3}$ est bien le minimum global de la fonction et il est atteint en $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

Maximum global : On étudie le comportement de la fonction lorsque $x \rightarrow +\infty$ avec $y = 0$:

$$f(x, 0) = x^2 + 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

La fonction n'est pas majorée, elle n'admet donc pas de maximum global.

Ex 2

Etude de points critiques

PPFk

Soit la fonction f de deux variables x et y définie par

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .



Pour tous réels x et y , $1 + x^2 + y^2 \geq 0$ donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. Exprimer les équations des lignes de niveau k de cette fonction, en fonction des valeurs possibles de $k \in \mathbb{R}$.



Soit k réel : la ligne de niveau k est l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$, c'est-à-dire

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = 4 - k$$

Or $1 + x^2 + y^2 \geq 1$ quels que soient x et y réels donc $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 1$ et ainsi l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$ est non vide si $4 - k \geq 1$ soit $k \leq 3$: dans ce cas, la ligne de niveau est un cercle centré en 0 de rayon $\sqrt{(4 - k)^2 - 1}$.

Partie B

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f .



On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{0 + 2x + 0}{2\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 - \frac{0 + 0 + 2y}{2\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

2. Exprimer la matrice hessienne de f .



On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-\sqrt{1+x^2+y^2} - \frac{-x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^2} \\
 &= \frac{-\sqrt{1+x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} \\
 &= \frac{\frac{-(1+x^2+y^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} \\
 &= \frac{-(1+x^2+y^2)+x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \\
 &= \frac{-1-y^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -(1+y^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

De même, x et y jouant des rôles symétriques,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-1-x^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -(1+x^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Enfin, on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ en réécrivant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = -x(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ puis en dérivant cette expression par rapport à y :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -x \times (2y) \times \frac{-1}{2}(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\
 &= xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

On peut enfin écrire la matrice hessienne :

$$\begin{aligned}
 Hess_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -(1+y^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} & xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} & -(1+x^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -(1+y^2) & xy \\ xy & -(1+x^2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Déterminer les points critiques de la fonction f .



Pour déterminer les points critiques (stationnaires) de la fonction f , on résout le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il existe donc un unique point stationnaire : c'est le point $(0, 0)$.

4. Vérifier que la fonction f admet un maximum local au point $(0, 0)$ et donner la valeur de ce maximum. Peut-on dire que ce maximum est global ?



On étudie la nature de ce point stationnaire en évaluant $Hess_f(0,0) = 1 \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $(-1) \times (-1) = 1 > 0$ donc la matrice admet bien un extremum local. Du fait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 < 0$, on en déduit qu'il s'agit bien d'un maximum local dont la valeur est $f(0,0) = 4 - \sqrt{1} = 3$.

Il s'agit bien d'un maximum global car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{1+x^2+y^2} \geq 1$ ce qui implique que $f(x,y) \leq 3$.

Ex 3

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

56tw

★ ★ ★ ★

On pose

$$f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.



On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(3x+1)$

On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = 0$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x \in \{-1; -1/3\}$.

Donc les points stationnaires de f sont les points $(-1,0)$ et $(-1/3,0)$.

Pour étudier la nature de ces points stationnaires, on utilise les conditions d'ordre 2 en donnant la matrice hessienne :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où $Hess_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $Hess_f(-1/3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a $(-2) \times (-2) > 0$ et $-2 < 0$ donc la fonction f présente un maximum local en $(-1,0)$.

De même, $2 \times (-2) < 0$ donc la fonction f présente un point selle en $(-1/3,0)$.

2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geq 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).



On cherche l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0 \iff y^2 = x(x+1)^2$.

Si on se restreint aux $x \geq 0$, $f(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{x}(x+1)$.

Pour étudier la courbe d'équation $y = \sqrt{x}(x+1)$ pour $x \geq 0$ dans le plan, on pose $g(x) = \sqrt{x}(x+1)$: c'est une fonction continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} > 0$$

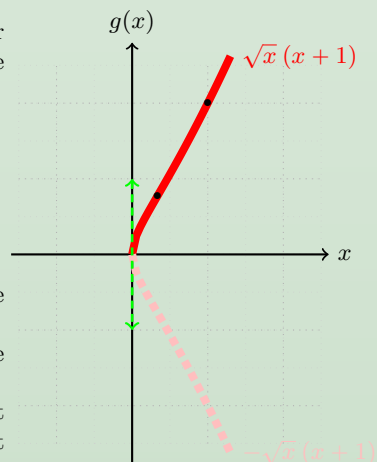
et

$$g''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

De l'expression de $g(x)$, on déduit que la courbe passe par les points $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1, 2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$;

De l'expression de $g'(x)$, on déduit que la courbe a une tangente verticale à l'origine.

De la résolution de $g''(x) = 0$, on déduit que le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $g'(\frac{1}{3}) = \sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe. La courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}(x+1)$ pour $x \geq 0$ par rapport à l'axe des x .



3. Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ du plan, c'est-à-dire, le point $(-1, 0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1, 0)$ et de rayon ε .



Dans la boule ouverte $\{(x, y, z); (x+1)^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, on est notamment dans le demi-espace $\{x < 0\}$. Or si $x < 0$ et $f(x, y) = 0$ alors nécessairement $y^2 = x(x+1)^2 \geq 0$ ce qui ne laisse d'autre choix que d'avoir $(x+1)^2 = 0$.

Par conséquent, le graphe $z = f(x, y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1, 0)$. Par conséquent, l'intersection $D \cap \mathcal{C}$ du disque

$$D = \{(x, y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

avec $\mathcal{C}$ ne consiste qu'au point $(-1, 0)$.

Ex 4

Optimisation simple

kzF4



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$$

1. Justifier (rapidement) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.



Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto e^{-x}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, leur produit l'est aussi.

2. Trouver les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.



Calculons déjà les dérivées partielles premières de f . Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{-x} - (x^2 + y^2)e^{-x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x}.$$

Ainsi, cherchons les valeurs $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

De $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, nous déduisons que $y = 0$ et en injectant dans l'autre équation, nous obtenons que $2x - x^2 = 0$ soit $x(2 - x) = 0$ et donc $x = 0$ ou $x = 2$.

Les points critiques sont alors $(0, 0)$ et $(2, 0)$.

3. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.



Étudions les dérivées secondes de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2 - y^2)e^{-x} = (x^2 + y^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2ye^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{-x}.$$

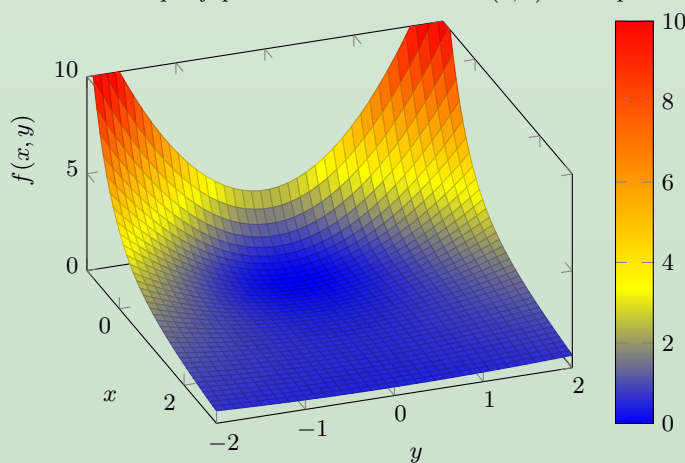
Ainsi, la hessienne associée à la fonction f est :

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} (x^2 + y^2 - 4x + 2)e^{-x} & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{vmatrix}$$

Ainsi, en évaluant cette fonction aux points critiques de f , nous obtenons :

$$H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(2, 0) = \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix}$$

On en déduit que f possède un minimum en $(0; 0)$ et un point selle en $(2; 0)$.



Ex 5

Etude de points critiques et d'une ligne de niveau

HofC



Une usine produit deux types de matériaux, notés A et B . Si, en une semaine, elle produit x kg de type A et y kg de type B , le coût total de production (en euros) est modélisé par la fonction

$$c(x, y) = 10000 + 50x + 60y - 0.05xy.$$

En pleine capacité, la production hebdomadaire totale ne peut dépasser 3000 kg, c'est-à-dire que

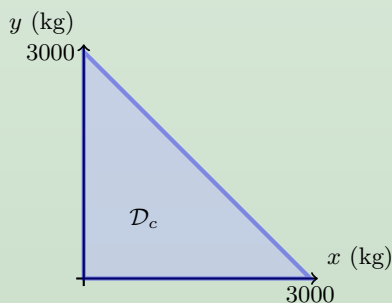
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3000.$$

Dans ce modèle, le coût reste toujours positif.

1. Décrire et représenter graphiquement le domaine de définition $\mathcal{D}_c$.



Le domaine de définition est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 3000$. Géométriquement, il s'agit d'un triangle du plan dont les sommets sont $(0, 0)$, $(3000, 0)$ et $(0, 3000)$.



2. Justifier que la fonction c admet un minimum sur $\mathcal{D}_c$ et que ce minimum est atteint.



On remarque que $\mathcal{D}_c$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus il est borné (c'est un triangle). Par ailleurs, la fonction c est polynomiale donc continue sur $\mathcal{D}_c$. D'après le théorème des valeurs extrêmes, la fonction c admet donc un minimum sur $\mathcal{D}_c$ et ce minimum est atteint en au moins un point de $\mathcal{D}_c$.

3. Rechercher les points critiques (minimum ou maximum locaux) à l'intérieur du domaine de définition.



La fonction c est polynomiale (donc de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$. Calculons ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, y) = 50 - 0.05y, \quad \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) = 60 - 0.05x.$$

En annulant ces dérivées, on obtient :

$$\begin{cases} 50 - 0.05y = 0 & \Rightarrow y = 1000, \\ 60 - 0.05x = 0 & \Rightarrow x = 1200. \end{cases}$$

Le seul point critique intérieur est donc $(1200, 1000)$.

Pour étudier sa nature, on calcule le Hessien :

$$H_c(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.05 \\ -0.05 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de ce Hessien est

$$\det H_c = 0 \cdot 0 - (-0.05)^2 = -0.0025 < 0,$$

ce qui caractérise un point selle en $(1200, 1000)$.

4. Étudier la fonction c sur le bord du domaine en substituant une variable en fonction de l'autre.



Sur le bord du domaine, la contrainte est $x + y = 3000$. En posant $y = 3000 - x$, on définit la fonction d'une variable :

$$f(x) = c(x, 3000 - x) = 10000 + 50x + 60(3000 - x) - 0.05x(3000 - x).$$

Calculons :

$$f(x) = 10000 + 50x + 180000 - 60x - 0.05(3000x - x^2) = 190000 - 10x - 150x + 0.05x^2,$$

soit

$$f(x) = 190000 - 160x + 0.05x^2, \quad x \in [0, 3000].$$

La dérivée de f est

$$f'(x) = -160 + 0.1x.$$

En posant $f'(x) = 0$, on trouve

$$0.1x = 160 \implies x = 1600.$$

Donc, $y = 3000 - 1600 = 1400$.

La dérivée seconde vaut $f''(x) = 0.1 > 0$, ce qui confirme que $x = 1600$ est bien un minimum local sur le bord. Ainsi, pour minimiser le coût sur la frontière du domaine, l'usine doit produire 1600 kg de type A et 1400 kg de type B.

Le coût minimal correspondant est

$$c(1600, 1400) = 10000 + 50 \times 1600 + 60 \times 1400 - 0.05 \times 1600 \times 1400 = 62000 \text{ euros.}$$

Ex 6

Etude d'extrema

XtkF

Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Pour tout $(x, y) \in K$, on pose

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$



graphe de la fonction f

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur K .



K est fermé borné, la fonction f est continue sur K donc d'après le théorème des valeurs extrêmes, f atteint son maximum et son minimum sur K .

2. En quels points sont-ils atteints ?



On cherche d'abord les points stationnaires dans l'intérieur de K : la fonction f n'est pas dérivable en $(0,0)$, on calcule les dérivées partielles en $(x,y) \in \overset{\circ}{K} \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 16\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{|x|} + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il n'y a aucune solution à ce système d'équations (si $x > 0$ alors $1 + 2x > 0$ et si $x < 0$ alors $-1 + 2x = 0$). Donc f n'admet pas de points stationnaires sur $\overset{\circ}{K} \setminus \{(0,0)\}$.

La fonction f n'a donc d'autre choix que d'atteindre ses bornes en $(0,0)$ ou bien sur la frontière du domaine K .

Or $f(0,0) = -3$ et pour tout $(x,y) \in K$, $\sqrt{x^2+y^2} + x^2 \geq 0$ donc $f(x,y) \geq -3 = f(0,0)$. On en déduit que f atteint son minimum en $(0,0)$ et ce minimum vaut -3 .

D'autre part, la frontière de K est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, sur lequel $f(x,y) = 1 + x^2$. On en déduit que le maximum est atteint si $x \in \{-4, 4\}$, ce qui impose $y = 0$. Le maximum est donc atteint aux points $(-4,0)$ et $(4,0)$, la valeur de ce maximum est 17.

Ex 7

Etude d'extrema

zhwJ

★ ★ ★

On étudie la fonction de deux variables

$$f: (x,y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.



L'ensemble de définition de f est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$

2. On pose $h(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$: déterminer l'ensemble de définition de h et étudier ses variations.



L'ensemble de définition de h est $D_h = \{t \in \mathbb{R}, t > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. La fonction h est dérivable sur son ensemble de définition et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{(t+1)^2 + t}{t^2} > 0$$

Par conséquent, h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Démontrer que $\text{grad}_f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$$

4. En déduire l'ensemble des points stationnaires de f .



La fonction h s'annule une et une seule fois sur son ensemble définition en $t = 1$ donc (x, y) est un point stationnaire si et seulement si $x = y = e$. Il existe un unique point stationnaire qui est le point (e, e) .

5. Déterminer l'ensemble des points extrémaux (locaux et globaux) de f .



Il est clair que f n'admet pas d'extremum global. En effet, on peut voir par exemple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 1) = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(1, y) = +\infty$.

De plus, au voisinage du point stationnaire (e, e) , on peut étudier les conditions du second ordre en formant la matrice hessienne :

$$Hess_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$Hess_f(e, e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

On a un déterminant négatif, donc le point (e, e) est un point selle.

Ex 8

Question d'optimisation

krLE

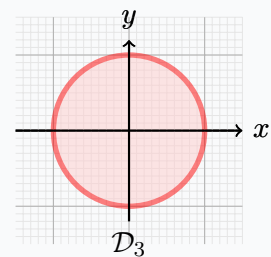
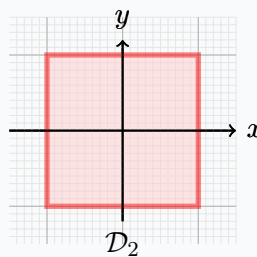
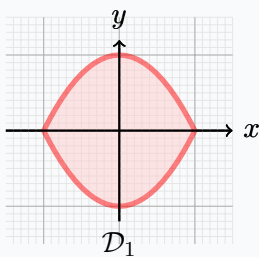
★ ★ ★

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Parmi les trois domaines représentés graphiquement ci-dessus, lequel est susceptible de représenter $\mathcal{D}$?



Le domaine $\mathcal{D}$ est le domaine $\mathcal{D}_1$, dont le bord est constitué de deux branches de paraboles d'équation $y = x^2 - 1$ et $y = 1 - x^2$.

2. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? fermé dans $\mathbb{R}^2$? Justifier très brièvement.



Le domaine $\mathcal{D}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ car le complémentaire de $\mathcal{D}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

3. Justifier que f admet un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{D}$.



La fonction f est continue sur le domaine $\mathcal{D}$ qui est fermé et borné. Donc, f admet un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{D}$.

4. Vérifier que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f dans l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$.



La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy + 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x^2$. Pour déterminer les points critiques de f dans l'intérieur de $\mathcal{D}$, on résout le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Par substitution, on trouve :

$$\begin{cases} -x^3 + 2x = 0 \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

La première équation donne $x(x^2 - 2) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$. Si $x = 0$, la deuxième équation donne $y = 0$. Si $x = \pm\sqrt{2}$, la deuxième équation donne $y = 2$. Or le point $(\sqrt{2}, 2)$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Donc, l'unique point critique de f dans l'intérieur de $\mathcal{D}$ est $(0, 0)$.

5. La fonction f admet-elle un extremum local sur l'intérieur de $\mathcal{D}$?



On calcule les dérivées partielles secondes de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y + 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x.$$

La matrice hessienne de f évaluée en $(0, 0)$ est

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

donc son déterminant est $4 > 0$. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$. Donc d'après les conditions du second ordre, $(0, 0)$ est un minimum local de f sur l'intérieur de $\mathcal{D}$.

6. Pour tout $x \in [-1; 1]$, on pose $g(x) = f(x, 1 - x^2)$ et $h(x) = f(x, x^2 - 1)$.

- (a) Simplifier les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.



On a $g(x) = (1 - x^2)^2 - x^2(1 - x^2) + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1$ et $h(x) = (x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 1) + x^2 = 1$.

- (b) Étudier les variations des fonctions g et h sur l'intervalle $[-1; 1]$.



On a $g'(x) = 8x^3 - 4x$ et $h'(x) = 0$. Les points critiques de g sont $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc g est décroissante sur $[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0]$, décroissante sur $[0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$. La fonction h est constante égale à 1 sur $[-1; 1]$. On a $g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ et $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Donc g admet un minimum global égal à $\frac{1}{2}$ sur $[-1; 1]$ et un maximum global égal à 1 sur $[-1; 1]$.

- (c) En déduire l'existence et le calcul d'un minimum et d'un maximum de la fonction f sur le bord de $\mathcal{D}$.



La restriction de f au bord de $\mathcal{D}$ est donnée par g et h , selon qu'on se place sur la branche supérieure ou inférieure du bord de $\mathcal{D}$. Donc, f admet un minimum global égal à $\frac{1}{2}$ et un maximum global égal à 1 sur le bord de $\mathcal{D}$.

7. En déduire la valeur du minimum global de f sur $\mathcal{D}$ et la valeur du maximum global de f sur $\mathcal{D}$.



On a un minimum local de f en $(0, 0)$ égal à 0, un minimum global de f sur le bord de $\mathcal{D}$ égal à $\frac{1}{2}$ et un maximum global de f sur le bord de $\mathcal{D}$ égal à 1. Donc, le minimum global de f sur $\mathcal{D}$ est 0 et le maximum global de f sur $\mathcal{D}$ est 1.

Ex 9

Méthode des moindres carrés

Z6wd

★ ★ ★ ★

On considère des points $M_1, \dots, M_n$ de $\mathbb{R}^2$, et on note (x_i, y_i) les coordonnées de chaque point M_i .

1. On cherche les points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ approchant au mieux le nuage de points formé par les points M_i au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

On admet que f admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer en quels points f admet ce minimum.



La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$. On cherche les points critiques (ou stationnaires) en annulant le gradient de f .

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) = 2 \left(\sum_{i=1}^n x - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 2 \left(nx - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

De même pour y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \left(ny - \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

On résout le système $\nabla f(x, y) = \vec{0}$:

$$\begin{cases} 2(nx - \sum_{i=1}^n x_i) = 0 \\ 2(ny - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \\ y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \end{cases}$$

Il y a un unique point critique : le barycentre du nuage de points $(\bar{x}, \bar{y})$.

Pour vérifier qu'il s'agit d'un minimum, on peut calculer la matrice Hessienne de f :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $2n > 0$. La matrice est définie positive, donc f est strictement convexe et le point critique correspond à un unique minimum global.

2. On cherche maintenant une relation affine entre les abscisses et les ordonnées de ces points. On cherche des constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour cela, on introduit $d_i = y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point M_i par rapport à la droite.

La méthode des moindres carrés consiste à choisir m et q de telle sorte que la somme des écarts au carré soit minimale.

Exprimer m et q en fonction des coordonnées des points.



Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(m, q) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2$$

Pour minimiser $\mathcal{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, i.e. les points (m, q) qui vérifient $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0$. Puisque

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m}(m, q) = -2 \left(\sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + q)) x_i \right), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}(m, q) = -2 \left(\sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + q)) \right),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m}(m, q) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}(m, q) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i x_i - mx_i^2 - qx_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q) = 0 \end{cases}$$

En réarrangeant les termes et en notant que $\sum_{i=1}^n q = nq$, on obtient le système linéaire suivant d'inconnues (m, q) :

$$\iff \begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2)m + (\sum_{i=1}^n x_i)q = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i)m + nq = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

On résout ce système (par exemple avec la méthode de Cramer). Le déterminant du système est $\Delta = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou la propriété de variance), $\Delta > 0$ tant que tous les x_i ne sont pas égaux.

On obtient :

$$\begin{cases} m = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \\ q = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{cases}$$

On a trouvé un seul point stationnaire. On établit sa nature en étudiant la matrice Hessienne :

$$H_{\mathcal{E}}(m, q) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $\det(H_{\mathcal{E}}(m, q)) = 4 \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 \right) = 4\Delta$. Comme vu précédemment, $\Delta > 0$ (si les x_i ne sont pas tous confondus), et le terme diagonal $2 \sum x_i^2$ est positif, donc la Hessienne est définie positive : il s'agit bien d'un minimum. La droite d'équation $y = mx + q$ ainsi calculée s'appelle droite de régression de y par rapport à x .