

Calcul différentiel



Version web

Ex 1

Calcul de dérivées partielles

WmCw

Pour chacune des fonctions suivantes : préciser l'ensemble de définition, puis calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

1. $f(x, y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{y}$
3. $f(x, y) = \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$
4. $f(x, y) = \sin(xy)$
5. $f(x, y) = \ln(x + y)$

Ex 2

Dérivées partielles

DMpD

★ ★

Soit la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de V .
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial r}$ et $\frac{\partial V}{\partial \theta}$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}$.
4. En déduire que

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = 0.$$

Ex 3

Calcul de dérivées partielles au bord du domaine de définition

Fg10

★ ★

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x + 5y}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour les points (x, y) où c'est possible.
3. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(x, y) = (0, 0)$.

i

On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas dérivable en 0. La question se pose donc pour f en $(x, y) = (0, 0)$ car dans ce cas $\sqrt{x+5y} = \sqrt{0}$. Pour répondre à la question, il faut revenir à la définition de la dérivée partielle en cherchant la limite du taux d'accroissement.

4. Même question en $(x, y) = (5, -1)$.

Ex 4

Calcul de dérivées partielles

11 An

★ ★

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0 , T_1 , $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et λ sont des constantes réelles.

1. Exprimer les deux dérivées partielles de T .
2. Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$$

pour une certaine constante k à déterminer.

Ex 5

Gradient et lignes de niveau

sfRx

★ ★

On considère une colline modélisée par la fonction altitude $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

On s'intéresse au point A de coordonnées $(3, 4)$.

1. (a) Calculer l'altitude au point A .
(b) Montrer que l'équation de la ligne de niveau passant par A est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.

i

Une ligne de niveau k est l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$.

2. On décide de marcher le long de cette ligne de niveau. On peut décrire la position à l'instant t par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos(t) \\ y(t) = 5 \sin(t) \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

- (a) Calculer le **vecteur vitesse** (ou vecteur tangent) $\vec{v}(t)$ en dérivant $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t .

(b) Calculer le **vecteur gradient** $\vec{\nabla} f$ au point $M(t)$.

i

Pour le gradient, calculez d'abord les dérivées partielles de f par rapport à x et y , puis substituez x et y par $x(t)$ et $y(t)$.

3. Effectuer le produit scalaire entre le vecteur gradient $\vec{\nabla} f(M(t))$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Que constatez-vous ? Quelle propriété géométrique cela vérifie-t-il ?

i

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{w} = x_u x_w + y_u y_w$.

4. On note $h(t)$ l'altitude à l'instant t . On a donc $h(t) = f(x(t), y(t))$.

- Remplacer $x(t)$ et $y(t)$ dans l'expression de f pour trouver l'expression explicite de $h(t)$.
- Dériver $h(t)$ par rapport à t . Le résultat est-il cohérent avec la définition d'une ligne de niveau ?

Ex 6

Problème de continuité

aUnN

★ ★ ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

i

On peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et montrer la continuité en majorant $|f(x, y) - f(0, 0)|$ par une fonction de r qui tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$.

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

i

Il faut revenir à la définition avec le calcul des taux d'accroissement car on ne peut pas appliquer les formules de dérivation au voisinage de $(0, 0)$.

Ex 7

Dérivées partielles et règle des chaînes

6n4q

★ ★

On considère une boîte dont la longueur ℓ , la largeur w et la hauteur h varient au cours du temps t .

A l'instant t_0 , les dimensions de la boîte sont $\ell = 1$ m, $w = h = 2$ m. A ce même instant, on

sait que ℓ et w augmentent de 2m/s et h diminue de 3m/s.

On note V le volume, S la surface et D la longueur de la diagonale de cette boîte.

1. Exprimer V , S et D comme fonction des trois variables ℓ , w , h .
2. Exprimer $\frac{\partial D}{\partial h}(\ell, w, h)$.
3. Que valent $\ell'(t_0)$, $w'(t_0)$, $h'(t_0)$?
4. On pose $\tilde{V}(t) = V(\ell(t), w(t), h(t))$. Exprimer $\frac{\partial V}{\partial \ell}$, $\frac{\partial V}{\partial w}$ et $\frac{\partial V}{\partial h}$ puis en calculant une dérivée partielle, déterminer les taux de variations à l'instant t_0 du volume, de la surface et de la diagonale de cette boîte.

Ex 8

Composition de fonctions

zxCh

★ ★

Soient f et g deux fonctions d'une variable, de classe $C^2(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

1. Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de x, y, f', g' .
2. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}x$ en fonction de x, y, f', g', f'', g'' .
3. Observer que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$. Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?
4. En déduire la valeur de :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Ex 9

Calcul de dérivées partielles

BAmc

On pose $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{y^2}.$$

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. On note $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $F(t) \mapsto t^2 + t$.
En remarquant que $f(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right)$, et en utilisant les règles de dérivation composée, retrouver les expressions obtenues à la question 1.

Ex 10

Différentiabilité

LBLK

★★★★

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3x^3 + 5y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

i

On peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et montrer la continuité en majorant $|f(x, y) - f(0, 0)|$ par une fonction de r qui tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$.

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

i

Il faut revenir à la définition avec le calcul des taux d'accroissement car on ne peut pas appliquer les formules de dérivation au voisinage de $(0, 0)$.

4. La fonction f est-elle de classe C^1 en $(0, 0)$?

i

Il s'agit de vérifier que les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$.

i

Pour établir si les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$, on doit étudier :

- si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$) admet une limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ puis
- si cette limite est égale à $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ (resp. à $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$)

5. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

i

Il faut étudier la limite de :

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - [(-3)h + 5k]}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Ex 11

Différentiabilité

hqXo

★★★★

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

i

On peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et montrer la continuité en majorant $|f(x, y) - f(0, 0)|$ par une fonction de r qui tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$.

2. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?