

Calcul différentiel



Version web

Ex 1

Calcul de dérivées partielles

WmCw

Pour chacune des fonctions suivantes : préciser l'ensemble de définition, puis calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

1. $f(x, y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$



La fonction f est polynomiale en x et y , elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 6y + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6x - 12y + 24$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -6$$

2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{y}$



La fonction f est définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{3x^2}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y + \frac{x^3}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 - \frac{6x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 - 2\frac{x^3}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{3x^2}{y^2}$$

3. $f(x, y) = \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$



La fonction f est une composée d'une exponentielle avec une fonction polynomiale en x et y , elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (4x + y + 7) \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x + 2y) \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (4 + (4x + y + 7)^2) \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (2 + (x + 2y)^2) \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (1 + (x + 2y)(4x + y + 7)) \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

4. $f(x, y) = \sin(xy)$



La fonction f est une composée d'un cosinus avec une fonction polynomiale en x et y , elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

5. $f(x, y) = \ln(x + y)$



La fonction f est une composée d'un ln avec une fonction polynomiale en x et y , elle est définie sur le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $x + y > 0$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2}$$

Ex 2

Dérivées partielles

DMpD

★ ★

Soit la fonction $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de V .



$$\mathcal{D}_V = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial r}$ et $\frac{\partial V}{\partial \theta}$.



pour $(r, \theta) \in \mathcal{D}_V$, on a

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2}{r^3} \cos \theta, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r^2} \sin \theta$$

3. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}$.



pour $(r, \theta) \in \mathcal{D}_V$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{2}{r^3} \cos \theta \right] = \frac{6}{r^4} \cos \theta \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{r^2} \sin \theta \right] = -\frac{1}{r^2} \cos \theta \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{r^2} \sin \theta \right] = \frac{2}{r^3} \sin \theta \end{aligned}$$

4. En déduire que

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = 0.$$



On a

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] &= \sin \theta \left[2r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right] + \left[\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right] \\ &= \sin \theta \left[2r \left(-\frac{2}{r^3} \cos \theta \right) + r^2 \frac{6}{r^4} \cos \theta \right] \\ &\quad + \left[\cos \theta \left(-\frac{1}{r^2} \sin \theta \right) + \sin \theta \left(-\frac{1}{r^2} \cos \theta \right) \right] \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} (-4 + 6 - 1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ex 3

Calcul de dérivées partielles au bord du domaine de définition

Fg10

★ ★

On considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x+5y}$.

1. Donner le domaine de définition de f .



La fonction f est définie sur le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y \geq 0\}$

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour les points (x, y) où c'est possible.



La fonction racine étant dérivable sur $]0; +\infty[$, on peut calculer avec les règles usuelles les dérivées partielles de f sur le demi plan ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y > 0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+5y}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5}{2\sqrt{x+5y}}$$

3. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(x, y) = (0, 0)$.



Il faut ici revenir à la définition en étudiant le taux d'accroissement des fonctions partielles en 0.

Pour étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, on pose pour tout $x > 0$: $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

De même, on pose pour tout $y > 0$: $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{5y}}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas.

4. Même question en $(x, y) = (5, -1)$.



C'est exactement le même problème qu'en $(0, 0)$ translaté en $(5, -1)$:

on pose $x = 5 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand x tend vers 5, soit $h \rightarrow 0$: $\frac{f(5+h, -1) - f(5, -1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

on pose $y = -1 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand y tend vers -1, soit $h \rightarrow 0$: $\frac{f(5, -1+h) - f(5, -1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

On conclut que les dérivées partielles n'existent pas en $(0, 0)$.

Ex 4

Calcul de dérivées partielles

11 An

★ ★

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0 , T_1 , $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et λ sont des constantes réelles.

1. Exprimer les deux dérivées partielles de T .



Les dérivées partielles sont définies pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) &= -\lambda T_1 e^{-\lambda x} (\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)) \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) &= \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x) \end{aligned}$$

2. Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$$

pour une certaine constante k à déterminer.



Il suffit de dériver une seconde fois par rapport à x l'expression de $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$: on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \\ &= (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x} (\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)) \\ &\quad + (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x} (\cos(\omega t - \lambda x) - \sin(\omega t - \lambda x)) \\ &= 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x) \end{aligned}$$

La constante attendue est donc $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Ex 5

Gradient et lignes de niveau

sfRx

★ ★

On considère une colline modélisée par la fonction altitude $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

On s'intéresse au point A de coordonnées $(3, 4)$.

1. (a) Calculer l'altitude au point A .
- (b) Montrer que l'équation de la ligne de niveau passant par A est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.



(a) $f(3, 4) = 100 - 3^2 - 4^2 = 100 - 9 - 16 = 75$. L'altitude est de 75.

(b) La ligne de niveau passant par A correspond à l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = 75$.

$$100 - x^2 - y^2 = 75 \iff x^2 + y^2 = 25$$

C'est bien l'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon 5.

2. On décide de marcher le long de cette ligne de niveau. On peut décrire la position à l'instant t par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos(t) \\ y(t) = 5 \sin(t) \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

- (a) Calculer le **vecteur vitesse** (ou vecteur tangent) $\vec{v}(t)$ en dérivant $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t .
- (b) Calculer le **vecteur gradient** $\vec{\nabla} f$ au point $M(t)$.



- (a) Le vecteur vitesse est donné par la dérivée des composantes du paramétrage :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) \\ 5 \cos(t) \end{pmatrix}$$

- (b) Les dérivées partielles de f sont $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Au point $M(t)$, le gradient vaut :

$$\vec{\nabla} f(M(t)) = \begin{pmatrix} -2(5 \cos t) \\ -2(5 \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \cos t \\ -10 \sin t \end{pmatrix}$$

3. Effectuer le produit scalaire entre le vecteur gradient $\vec{\nabla} f(M(t))$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Que constatez-vous ? Quelle propriété géométrique cela vérifie-t-il ?



Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(M(t)) \cdot \vec{v}(t) &= (-10 \cos t)(-5 \sin t) + (-10 \sin t)(5 \cos t) \\ &= 50 \cos t \sin t - 50 \sin t \cos t = 0 \end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul pour tout t . On constate que le gradient est orthogonal au vecteur vitesse. Cela vérifie la propriété selon laquelle le gradient est toujours normal (perpendiculaire) à la ligne de niveau.

4. On note $h(t)$ l'altitude à l'instant t . On a donc $h(t) = f(x(t), y(t))$.
- (a) Remplacer $x(t)$ et $y(t)$ dans l'expression de f pour trouver l'expression explicite de $h(t)$.
- (b) Dériver $h(t)$ par rapport à t . Le résultat est-il cohérent avec la définition d'une ligne de niveau ?



- (a) $h(t) = 100 - (5 \cos t)^2 - (5 \sin t)^2 = 100 - 25(\cos^2 t + \sin^2 t)$. Comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on a $h(t) = 100 - 25 = 75$.
- (b) La fonction $h(t)$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $h'(t) = 0$. C'est cohérent car se déplacer sur une ligne de niveau signifie par définition que l'altitude ne change pas. *Remarque* : On retrouve ici la règle de la chaîne, car on a vérifié que $\frac{d}{dt} f(M(t)) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}(t) = 0$.

Ex 6

Problème de continuité

aUnN

★ ★ ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?



On peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$: en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $|\cos(\theta)| \leq 1$ et $|\sin(\theta)| \leq 1$, on obtient la majoration suivante : $|f(x, y)| \leq \frac{r \times r(r^2 + r^2)}{r^2} \leq 2r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. On peut ainsi conclure que f est bien continue en $(0, 0)$.

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.



Les formules de dérivation usuelles s'appliquent sur l'expression de f en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(-x)(y^4 + 4y^2x^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.



On ne peut pas utiliser des formules de dérivation puisqu'il n'y a pas d'expression de la fonction au voisinage de ce point. On doit donc revenir à la définition et regarder la limite du taux d'accroissement pour chaque variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Ex 7

Dérivées partielles et règle des chaînes

6n4q

★ ★

On considère une boîte dont la longueur ℓ , la largeur w et la hauteur h varient au cours du temps t .

A l'instant t_0 , les dimensions de la boîte sont $\ell = 1$ m, $w = h = 2$ m. A ce même instant, on sait que ℓ et w augmentent de 2m/s et h diminue de 3m/s.

On note V le volume, S la surface et D la longueur de la diagonale de cette boîte.

1. Exprimer V , S et D comme fonction des trois variables ℓ , w , h .



On écrit $V(\ell, w, h) = \ell \times w \times h$, $S(\ell, w, h) = 2(wh + w\ell + h\ell)$, $D = \sqrt{\ell^2 + w^2 + h^2}$.

2. Exprimer $\frac{\partial D}{\partial h}(\ell, w, h)$.



$$\frac{\partial D}{\partial h}(\ell, w, h) = \frac{2h}{2\sqrt{\ell^2 + w^2 + h^2}} = \frac{h}{\sqrt{\ell^2 + w^2 + h^2}}$$

3. Que valent $\ell'(t_0)$, $w'(t_0)$, $h'(t_0)$?



D'après l'énoncé, $\ell'(t_0) = w'(t_0) = 2$, $h'(t_0) = -3$.

4. On pose $\tilde{V}(t) = V(\ell(t), w(t), h(t))$. Exprimer $\frac{\partial V}{\partial \ell}$, $\frac{\partial V}{\partial w}$ et $\frac{\partial V}{\partial h}$ puis en calculant une dérivée partielle, déterminer les taux de variations à l'instant t_0 du volume, de la surface et de la diagonale de cette boîte.



Le taux de variation du volume est modélisé par la dérivée de $\tilde{V}$ par rapport au temps. On peut voir V comme la composée de la fonction $t \mapsto (\ell(t), w(t), h(t))$ avec la fonction de trois variables $(\ell, w, h) \mapsto \ell \times w \times h$.

D'après la règle des chaînes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(t_0) &= \frac{\partial V}{\partial \ell}(\ell(t_0), w(t_0), h(t_0)) \times \ell'(t_0) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial w}(\ell(t_0), w(t_0), h(t_0)) \times w'(t_0) + \frac{\partial V}{\partial h}(\ell(t_0), w(t_0), h(t_0)) \times h'(t_0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial V}{\partial \ell}(\ell, w, h) = wh$, $\frac{\partial V}{\partial w}(\ell, w, h) = \ell h$ et $\frac{\partial V}{\partial h}(\ell, w, h) = \ell w$.

Donc en substituant, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(t_0) &= \ell'(t_0)w(t_0)h(t_0) + \ell(t_0)w'(t_0)h(t_0) + \ell(t_0)w(t_0)h'(t_0) \\ &= 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times (-3) \\ &= 6m^3/s \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement avec la règle des chaînes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(t_0) &= 2\ell'(t_0)(w(t_0) + h(t_0)) + 2w'(t_0)(\ell(t_0) + h(t_0)) + 2h'(t_0)(\ell(t_0) + w(t_0)) \\ &= 10m^2/s \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t}(t_0) &= \frac{\ell(t_0)\ell'(t_0) + w(t_0)w'(t_0) + h(t_0)h'(t_0)}{\sqrt{\ell^2(t_0) + w^2(t_0) + h^2(t_0)}} \\ &= 0m/s \end{aligned}$$

Ex 8

Composition de fonctions

zxCh

★ ★

Soient f et g deux fonctions d'une variable, de classe $C^2(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

1. Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de x, y, f', g' .



Par composition, φ est dérivable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et par dérivation d'un produit et application de la règle des chaînes on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= f(x+y) + x \times 1 \times f'(x+y) + y \times 1 \times g'(x+y) \\ &= f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)\end{aligned}$$

2. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} x$ en fonction de x, y, f', g', f'', g'' .



On redérive les expressions ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)) \\ &= 1 \times f'(x+y) + (1 \times f'(x+y) + x \times 1 \times f''(x+y)) + y \times 1 \times g''(x+y) \\ &= 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) &= xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)) \\ &= f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)\end{aligned}$$

3. Observer que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$. Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?



Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de tout point (x, y) le théorème de Schwarz s'applique (Th 2.10 du cours) et permet de conclure qu'en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$.

4. En déduire la valeur de :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$



Il suffit de remplacer par les expressions trouvées ci-dessus, simplifier et on trouve $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$

Ex 9

Calcul de dérivées partielles

Banc

On pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{y^2}.$$

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.



La fonction f admet des dérivées partielles en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x + y}{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2x^2}{y^3} - \frac{x}{y^2} \\ &= \frac{-2x^2 - xy}{y^3}\end{aligned}$$

2. On note $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $F(t) \mapsto t^2 + t$.

En remarquant que $f(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right)$, et en utilisant les règles de dérivation composée, retrouver les expressions obtenues à la question 1.



Dans un premier temps, on remarque que F est dérivable en tout point $t \in \mathbb{R}$ et $F'(t) = 2t + 1$. D'autre part, par application de la règle des chaînes, on peut calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(F\left(\frac{x}{y}\right) \right) \\ &= \left(F'\left(\frac{x}{y}\right) \right) \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \left(2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right) \times \frac{1}{y} \\ &= \frac{2x + y}{y^2}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(F\left(\frac{x}{y}\right) \right) \\ &= \left(F'\left(\frac{x}{y}\right) \right) \times \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \left(2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right) \times \frac{-x}{y^2} \\ &= \frac{-2x^2 - xy}{y^3}\end{aligned}$$

Ex 10

Différentiabilité

★ ★ ★ ★

LBLK

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3x^3 + 5y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?



Notons tout d'abord que f est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc elle y est définie et C^∞ . Comme f est par ailleurs définie en $(0,0)$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

Pour étudier la continuité en $(0,0)$, on étudie la différence $f(x,y) - f(0,0)$ et on passe comme souvent en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0) &= \frac{-3(r \cos \theta)^3 + 5(r \sin \theta)^3}{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4} \\ &= \frac{r^3(-3 \cos^3 \theta + 5 \sin^3 \theta)}{r^4} \\ &= r(-3 \cos^3 \theta + 5 \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

On obtient la majoration

$$\begin{aligned} |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0)| &\leq r(|-3 \cos^3 \theta| + |5 \sin^3 \theta|) \\ &\leq (3+5)r \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0_+} 0 \text{ indépendamment de } \theta \end{aligned}$$

Ainsi $f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0,0)$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$.

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.



Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on applique les formules classiques de dérivation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} [-3x^3 + 5y^3] (x^2 + y^2) - (-3x^3 + 5y^3) \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2]}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(-9x^2)(x^2 + y^2) - (-3x^3 + 5y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 9x^2y^2 - 10xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} [-3x^3 + 5y^3] (x^2 + y^2) - (-3x^3 + 5y^3) \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + y^2]}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(15y^2)(x^2 + y^2) - (-3x^3 + 5y^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{6x^3y + 15x^2y^2 + 5y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.



On revient à la définition en étudiant les taux d'accroissement.

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{-3h^3/h^2 - 0}{h} = -3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} -3, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -3$$

et

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{5k^3/k^2}{h} = 5 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 5 \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5$$

4. La fonction f est-elle de classe C^1 en $(0,0)$?



Pour établir si f est C^1 en $(0,0)$, on doit étudier

— si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$) admet une limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ puis

— si cette limite est égale à $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -3$ (resp. à $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 5$)

Regardons les limites de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ selon 3 chemins : la droite $y = 0$, la droite $x = 0$, la droite $x = y$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) \rightarrow -3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) \rightarrow -\frac{11}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \rightarrow 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \rightarrow -\frac{13}{2}$$

Ainsi ni $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ni $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'admettent de limites quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. A fortiori elles ne sont pas continues en $(0, 0)$ donc f n'est pas C^1 en $(0, 0)$

5. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?



Comme f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, il est possible que f soit différentiable en $(0, 0)$ et si elle l'est, sa différentielle $df(0, 0)$ est nécessairement égale à $-3dx + 5dy$. Puisque f n'est pas de classe C^1 , on ne peut pas conclure directement à la différentiabilité et il faut étudier la limite de

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - [(-3)h + 5k]}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Or

$$\begin{aligned} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - (-3h + 5k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= (\text{passage en polaires } h = r \cos \theta, k = r \sin \theta) \\ &= \frac{r(-3 \cos^3 \theta + 5 \sin^3 \theta) + 3r \cos \theta - 5r \sin \theta}{r} \\ &= -3 \cos^3 \theta + 5 \sin^3 \theta + 3 \cos \theta - 5 \sin \theta \end{aligned}$$

Cette quantité n'a pas de limite quand $r \rightarrow 0_+$ puisqu'elle dépend de θ . A fortiori, elle ne tend pas vers 0, ce qui signifie par définition que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Ex 11

Différentiabilité

★ ★ ★

hqx0

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?



Tout d'abord, on remarque que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est continue (et même C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$) en tant que fraction rationnelle. Pour étudier la continuité en $(0,0)$, on passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0) &= \frac{(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^3}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ &= r \cos^2 \theta \sin^3 \theta \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned} |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0)| &\leq r \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0 \text{ indépendamment de } \theta \end{aligned}$$

Ainsi f est continue en $(0,0)$, et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.



pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(2xy^3)(x^2 + y^2) - (x^2 y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{(3x^2 y^2)(x^2 + y^2) - (x^2 y^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 2xy^5 \\ x^4 y^2 + x^2 y^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?



Nous avons

— existence des dérivées partielles

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ existe et vaut } 0$$

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ existe et vaut } 0$$

— continuité des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\quad (\text{passage en polaires}) \\ &= 2r^2 \cos \theta \sin^5 \theta \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 2r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0 \text{ indépendamment de } \theta$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \frac{x^4 y^2 + x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\quad (\text{passage en polaires}) \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0 \text{ indépendamment de } \theta$$

On conclut que f est C^1 en $(0, 0)$. Par ailleurs, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Au final f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$

4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?



f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car elle est C^1 . C'est l'application du théorème 2.9 du poly.