

Intégration



Version web

Ex 1

Limite d'une suite et intégrale de Riemann

SJ11

★ ★ ★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Montrer que $v_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$.
2. Exprimer la limite de v_n (quand $n \rightarrow +\infty$) sous la forme d'une intégrale définie et calculer cette intégrale. On pourra utiliser une intégration par parties.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Ex 2

Limite d'une somme de Riemann

YfYo

★ ★ ★

En utilisant les sommes de Riemann, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}$.

Ex 3

Primitives de fonctions

r5ft

★

1. Déterminer toutes les primitives de $f(x) = \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$.



Posons $u = 1 + e^{3x}$, alors $du = 3e^{3x} dx$. Donc $\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x}) + C$.

2. Déterminer toutes les primitives de $g(x) = \cos x \sin^2 x$.



Avec $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. Alors $\int \cos x \sin^2 x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

3. Déterminer toutes les primitives de $h(x) = \frac{3x}{\sqrt{1 + x^2}}$.



Posons $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$. Alors $\int \frac{3x}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \frac{3}{2} \int u^{-1/2} du = 3\sqrt{u} + C = 3\sqrt{1 + x^2} + C$.

Ex 4

Calcul d'intégrales définies

n6kf

★ ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-1}^1 (t^4 + t^{917}) dt$

2. $I_2 = \int_1^2 s^{\frac{4}{3}} ds$

3. $I_3 = \int_1^2 \frac{dt}{(t+4)^3}$

4. $I_4 = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x})^3}{x^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Ex 5

Calcul d'intégrales par reconnaissance de dérivées

Rg7q

★

1. Calculer $I_1 = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(3x)) dx$.



$$I_1 = \left[x - \frac{1}{3} \sin(3x) \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin(\pi) = \frac{\pi}{3}.$$

2. Calculer $I_2 = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(x^2) dx$.



Posons $u = x^2$, $du = 2x dx$. Alors $I_2 = \int_0^{\pi} \sin u du = [-\cos u]_0^{\pi} = 2$.

3. Calculer $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$.



Posons $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$. Alors $I_3 = \int_0^{\ln 2} u^{-1/2} du = [2\sqrt{u}]_0^{\ln 2} = 2\sqrt{\ln 2}$.

Ex 6

Calcul d'intégrales par primitivation

i3Sk

★ ★

Calculer les intégrales suivantes par primitivation :

1. $I_1 = \int_1^2 \left(s^3 + \frac{1}{s^2} \right) ds$

2. $I_2 = \int_0^2 x e^{-x^2+1} dx$

Ex 7

Intégration par parties

NgxZ

★ ★

Calculer $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.



On remarque $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x)$. Par parties : $u = \operatorname{arsinh}(x)$, $dv = dx$, donc $du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $v = x$. Ainsi $I = [x \operatorname{arsinh}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. Or $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$. Donc $I = \ln(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.

Ex 8

Primitives de fonctions rationnelles

Qc6o

★ ★ ★ ★

L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression explicite des primitives de $x \rightarrow \frac{1}{(x^2+1)^2}$. On pose $I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx$ et $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

1. En intégrant I_1 par parties, donner une relation entre I_2 et I_1 . On pourra écrire $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{(1+x^2)^2}$, où a et b sont deux réels à préciser.
2. En déduire l'expression de I_2 .

Ex 9

Calcul d'intégrales par primitivation et intégration par parties

TyCq

★ ★ ★

Calculer les intégrales suivantes par primitivation, intégration par parties :

1. $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln t}{t} dt$
2. $I_2 = \int_2^e \frac{1}{t \ln^2 t} dt$
3. $I_3 = \int_1^2 \frac{e^t}{e^t - 2} dt$
4. $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$
5. $I_5 = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$
6. $I_6 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan t dt$
7. $I_7 = \int_0^1 t^2 \ln t dt$
8. $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$

Ex 10

Décomposition en éléments simples et intégration

fRkA

★ ★ ★

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ on ait : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 f(x) dx$.
3. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$.