

Polynômes et fractions rationnelles



1 Polynômes

Version web

Ex 1

Calcul de division euclidienne

pZq6

Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes définis ci-dessous.

1. $A(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 8$, par $B(X) = X - 1$;
2. $C(X) = 3X^5 + 2X^4 - 2X^2 + 1$, par $D(X) = X^3 + X + 2$.

Ex 2

Calcul de reste de division euclidienne

CuTJ

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $(X^2 - 1)$ est $(X + 1)$. Quels sont les restes de la division de P par $(X + 1)$? par $(X - 1)$?



Revenir à la définition en écrivant qu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X)(X^2 - 1) + (X + 1)$.

Ex 3

Multiplicité d'une racine

XKwm

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P(X) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$$

En déduire la factorisation de $P(X)$.



Revenir à la définition ou utiliser la caractérisation d'une racine multiple avec les dérivées du polynôme. Première méthode : effectuer la division euclidienne de P par $(X - 1)$, puis successivement du quotient par $(X - 1)$ tant que le reste est nul.

Deuxième méthode : évaluer $P(1)$, puis $P'(1)$, puis $P^{(2)}(1)$... tant que le résultat est nul.

Ex 4

Multiplicité d'une racine et factorisation d'un polynôme

CLjr

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine x_0 du polynôme P , et en déduire la factorisation du polynôme, dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \quad x_0 = 1.$



Calculer $P(1)$, puis $P'(1)$...

2. $P(X) = X^3 - iX^2 + X - i \quad x_0 = i.$



Calculer $P(i)$, puis $P'(i)$...

Ex 5

Divisibilité et racines

gLG

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $P_n(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est divisible par $Q(X) = X(X + 1)(2X + 1)$.



Traduire cette information de divisibilité de polynômes en termes de racines : si P_n est divisible par Q alors les racines de Q sont également des racines de P_n .

Ex 6

Racine multiple

erHi

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.



Supposer qu'il existe une racine multiple, c'est-à-dire qu'il existe α tel que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et raisonner par l'absurde.

Ex 7

Multiplicité et factorisation

R6XJ

Soient a et b des nombres réels. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$P(X) = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$$

ayant une racine d'ordre de multiplicité égal à 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes obtenus.

Ex 8

Déterminant de Vandermonde

5sS2

On cherche à calculer le déterminant suivant, dit de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

1. Quel est le degré du polynôme $P(x) = \Delta$?

i

Exprimer, sans le calculer, le déterminant en développant par rapport à la dernière colonne.

2. Sans calculer Δ , donner trois racines évidentes du polynôme $P(x)$. En déduire Δ .

3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

i

Utiliser les questions précédentes en remplaçant a , b et c par des valeurs judicieuses.

Ex 9

Reste de division euclidienne

NCVL

On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $X^3 + X^2 + X + 1$.

- Déterminer une racine évidente de $X^3 + X^2 + X + 1$, et factoriser le polynôme. Quelles sont ses racines dans $\mathbb{C}$?
- Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n(X)$ et de trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On ne demande pas de déterminer $Q_n(X)$.

- Exprimer $P(-1)$, $P(i)$ et $P(-i)$ en fonction de a_n, b_n et c_n , et en déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^3 + X^2 + X + 1$. On distinguera deux cas : $n = 2p$ (cas n pair) et $n = 2p + 1$ (cas n impair).

2 Fractions rationnelles

Version web

Ex 10

Division euclidienne et fractions rationnelles

yNs9

Soit les polynômes à coefficients réels $A(X) = X^3 + 2X - 5$ et $B(X) = X - 1$.

- Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B .

2. En déduire les coefficients a, b, c et d de la décomposition en éléments simples de

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{X^3 + 2X - 5}{X - 1} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X - 1}$$

Ex 11

Elements simples

zAlF

Pour chacune des fractions rationnelles, indiquer s'il s'agit d'un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.

Fraction rationnelle	Oui	Non	Fraction rationnelle	Oui	Non
$F_1(X) = \frac{1}{(X+1)}$			$F_4(X) = \frac{X-1}{(X^2+1)}$		
$F_2(X) = \frac{1}{(X^2+1)}$			$F_5(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2}$		
$F_3(X) = \frac{1}{(X+1)^3}$			$F_6(X) = \frac{X^2+X+1}{(X^3+1)}$		

Ex 12

Décomposition en éléments simples

z5R1

1. Vérifier que le polynôme $B(X) = X^2 - X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(X) = X^3 + 2X - 1$ par le polynôme $B(X)$, et en déduire les coefficients a, b, c et d de la décomposition en éléments simples de :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(B(X))^2} = \frac{X^3 + 2X - 1}{(X^2 - X + 1)^2} = \frac{aX + b}{(X^2 - X + 1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1}$$

2. En s'inspirant de la question précédent, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{-3X^2 + X - 3}{(X^2 + 1)^8}$$

Ex 13

Décomposition en éléments simples

pGze

- Calculer la division euclidienne de $X^5 + 1$ par $X^4 - 2X^3 + X^2$.
- Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2$.
- On note $F(X) = \frac{X^5+1}{X^4-2X^3+X^2}$. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.
- Calculer $\lim_{X \rightarrow 0} (X^2 \cdot F(X))$
- Calculer $\lim_{X \rightarrow 1} ((X-1)^2 \cdot F(X))$.
- Calculer $F(-1)$ et $F(2)$ de deux façons différentes.
- En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.