

Polynômes et fractions rationnelles



1 Polynômes

Version web

Ex 1

Calcul de division euclidienne

pZq6

Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes définis ci-dessous.

1. $A(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 8$, par $B(X) = X - 1$;



$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 8 & X - 1 \\
 - (X^4 - X^3) & X^3 - 2X^2 + 2X - 4 \\
 \hline
 -2X^3 + 4X^2 - 6X + 8 & \\
 - (-2X^3 + 2X^2) & \\
 \hline
 2X^2 - 6X + 8 & \\
 - (2X^2 - 2X) & \\
 \hline
 -4X + 8 & \\
 - (-4X + 4) & 4
 \end{array}$$

$$A(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 8 = \underbrace{(X - 1)}_{B(X)} \cdot (X^3 - 2X^2 + 2X - 4) + 4$$

2. $C(X) = 3X^5 + 2X^4 - 2X^2 + 1$, par $D(X) = X^3 + X + 2$.



$$\begin{array}{r|l}
 3X^5 + 2X^4 - 2X^2 + 1 & X^3 + X + 2 \\
 - (3X^5 + 3X^3 + 6X^2) & 3X^2 + 2X - 3 \\
 \hline
 2X^4 - 3X^3 - 8X^2 + 1 & \\
 - (2X^4 + 2X^2 + 4X) & \\
 \hline
 -3X^3 - 10X^2 - 4X + 1 & \\
 - (-3X^3 - 3X - 6) & \\
 \hline
 -10X^2 - X + 7 &
 \end{array}$$

$$C(X) = 3X^5 + 2X^4 - 2X^2 + 1 = \underbrace{(X^3 + X + 2)}_{D(X)} \cdot (3X^2 + 2X - 3) + (-10X^2 - X + 7)$$

Ex 2

Calcul de reste de division euclidienne

CuTJ

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $(X^2 - 1)$ est $(X + 1)$. Quels sont les restes de la division de P par $(X + 1)$? par $(X - 1)$?



On a :

$$P(X) = Q(X)(X^2 - 1) + (X + 1)$$

Que l'on peut encore écrire :

$$P(X) = Q(X) \cdot (X - 1)(X + 1) + (X + 1) = (X + 1)[Q(X) \cdot (X - 1) + 1] + 0$$

Le reste de la division par $(X + 1)$ est 0.

On peut aussi écrire :

$$P(X) = Q(X) \cdot (X - 1)(X + 1) + \underbrace{(X - 1) + 2}_{X+1} = (X - 1)[Q(X) \cdot (X + 1) + 1] + 2$$

Le reste de la division par $(X - 1)$ est 2.

Ex 3

Multiplicité d'une racine

XXwm

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P(X) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$$

En déduire la factorisation de $P(X)$.



Méthode 1 : Par divisions successives.

Le reste de la quatrième division euclidienne n'est pas nul, donc 1 est racine de multiplicité 3 . En reprenant les calculs de division euclidienne, il vient :

$$\begin{aligned} X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2 &= (X - 1)(X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 5) \\ &= (X - 1)(X - 1)(X^3 - 3X^2 + 7X - 5) \\ &= (X - 1)(X - 1)(X - 1)(X^2 - 2X + 5) \\ &= (X - 1)^3(X^2 - 2X + 5) \end{aligned}$$



Méthode 2 : par les dérivées successives.

$$\begin{array}{ll}
 P(X) &= X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5 & P(1) &= 0 \\
 P'(X) &= 5X^4 - 20X^3 + 42X^2 - 44X + 17 & P'(1) &= 0 \\
 P''(X) &= 20X^3 - 60X^2 + 84X - 44 & P''(1) &= 0 \\
 P^{(3)}(X) &= 60X^2 - 120X + 84 & P^{(3)}(1) &= 4 \neq 0
 \end{array}$$

Donc 1 est racine de multiplicité 3 de $P(X)$. Autrement dit, $P(X)$ est divisible par $(X-1)^3$. On effectue la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, il vient :

$$\begin{array}{r|l}
 X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5 & X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\
 - (X^5 - 3X^4 + 3X^3 - X^2) & X^2 - 2X + 5 \\
 \hline
 -2X^4 + 11X^3 - 21X^2 + 17X - 5 & \\
 - (-2X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 2X) & \\
 \hline
 5X^3 - 15X^2 + 15X - 5 & \\
 - (5X^3 - 15X^2 + 15X - 5) & \\
 \hline
 X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2 = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(X^2 - 2X + 5) & \\
 = (X-1)^3(X^2 - 2X + 5) &
 \end{array}$$

Il reste à factoriser $X^2 - 2X + 5$, polynôme du second degré dont le discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. La factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (X-1)^3(X^2 - 2X + 5)$$

Les racines complexes conjuguées de $X^2 - 2X + 5$ sont $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$. La factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X-1)^3(X-1-2i)(X-1+2i)$$

Ex 4

Multiplicité d'une racine et factorisation d'un polynôme

CLjr

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine x_0 du polynôme P , et en déduire la factorisation du polynôme, dans les cas suivants :

$$1. P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \quad x_0 = 1.$$



$$P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2.$$

On a :

$$P(1) = 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0$$

$$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5$$

$$P'(1) = 4 - 3 - 6 + 5 = 0$$

$$P''(X) = 12X^2 - 6X - 6$$

$$P''(1) = 12 - 6 - 6 = 0$$

$$P^{(3)}(X) = 24X - 6$$

$$P^{(3)}(1) \neq 0$$

Ainsi $x_0 = 1$ est racine d'ordre 3 de P , donc par définition il existe un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X - 1)^3 Q(X)$$

Or P est d'ordre 4 donc Q est de degré 1. De plus, le coefficient de plus haut degré de P est 1, donc celui de Q aussi et il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $Q(X) = X - a$. Ainsi :

$$P(X) = (X - 1)^3 (X - a)$$

Or $P(0) = -1 \times (-a) = a$ d'une part et $P(0) = -2$ d'après la définition de P donc $a = -2$ et :

$$P(X) = (X - 1)^3 (X + 2)$$

2. $P(X) = X^3 - iX^2 + X - i \quad x_0 = i.$



$$P(X) = X^3 - iX^2 + X - i.$$

On a :

$$P(i) = i^3 - i.i^2 + i - i = 0$$

$$P'(X) = 3X^2 - 2iX + 1$$

$$P'(i) = 3i^2 - 2.i.i + 1 = 0$$

$$P''(X) = 6X - 2i$$

$$P''(i) = 6i - 2i \neq 0$$

Ainsi $x_0 = i$ est racine double de P , donc par définition il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P(X) = (X - i)^2 (X - a)$$

Or $P(0) = a = -i$
d'où

$$P(X) = (X - i)^2 (X + i)$$

Ex 5

Divisibilité et racines

gLXG

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $P_n(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est divisible par $Q(X) = X(X + 1)(2X + 1)$.



On a :

$$P_n(0) = (1)^{2n} - 0 - 0 - 1 = 0$$

$$P_n(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2 \cdot (-1) - 1 = 0 - 1 + 2 - 1 = 0$$

$$P_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1 - 1 = 0$$

0 racine signifie que X divise $P_n(X)$: $P_n(X) = XQ_1(X)$; -1 racine signifie que $(X + 1)$ divise $P_n(X)$: $P_n(X) = (X + 1) \underbrace{Q_2(X)}_{X \cdot Q_3(X)} = X \cdot (X + 1)Q_3(X)$; $-\frac{1}{2}$ racine signifie que $(2X + 1)$ divise $P_n(X)$:

$$P_n(X) = (2X + 1) \cdot Q_4(X) = \underbrace{X(X + 1)(2X + 1)}_{Q(X)} \cdot Q_5(X)$$

donc $Q(X) = X(X + 1)(2X + 1)$ divise $P_n(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

Ex 6

Racine multiple

erHi

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.



Raisonnement par l'absurde : a est racine multiple ssi $P(a) = P'(a) = 0$. On a :

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X^n}{n!}$$

$$P'(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(a) = 0 \Leftrightarrow 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^n}{n!} = 0 \\ P'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

or 0 n'est pas racine car $P(0) = 1$, donc a ne peut pas être racine simultanément de P et P' . a ne peut pas être racine multiple.

Ex 7

Multiplicité et factorisation

R6XJ

Soient a et b des nombres réels. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$P(X) = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$$

ayant une racine d'ordre de multiplicité égal à 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes obtenus.



x_0 est racine d'ordre de multiplicité 3 ssi $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = 0$ et $P^{(3)}(x_0) \neq 0$.

$$P(x_0) = 3 \cdot x_0^5 - 10 \cdot x_0^3 + a \cdot x_0 + b$$

$$P'(x_0) = 15 \cdot x_0^4 - 30 \cdot x_0^2 + a = 0$$

$$P''(x_0) = 60 \cdot x_0^3 - 60x_0 = 60 \cdot x_0 (x_0^2 - 1) = 0$$

$$P^{(3)}(x_0) = 180 \cdot x_0^2 - 60 = 60 (3 \cdot x_0^2 - 1)$$

$$(3) \Leftrightarrow x_0 \cdot (x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 1 \text{ ou } x_0 = -1.$$

1^{er} cas : $x_0 = 0$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow a = 0$$

$$(1) \Rightarrow b = 0$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 = X^3 \cdot (3X^2 - 10) = 3 \cdot X^3 \cdot \left(X - \sqrt{\frac{10}{3}}\right) \left(X + \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$$

2^{ème} cas : $x_0 = 1$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow 15 - 30 + a = 0 \Rightarrow a = 15$$

$$(1) \Rightarrow 3 - 10 + 15 + b = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 + 15 \cdot X - 8 = (X - 1)^3 \cdot (3X^2 + 9X + 8)$$

3^{ème} cas : $x_0 = -1$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow 15 - 30 + a = 0 \Rightarrow a = 15$$

$$(1) \Rightarrow -3 + 10 - 15 + b = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 + 15 \cdot X + 8 = (X + 1)^3 \cdot (3X^2 - 9X + 8)$$

Ex 8

Déterminant de Vandermonde

5sS2

On cherche à calculer le déterminant suivant, dit de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

1. Quel est le degré du polynôme $P(x) = \Delta$?



Si l'on développe le déterminant Δ par rapport à sa 4^{ème} colonne, on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré au plus 3.

2. Sans calculer Δ , donner trois racines évidentes du polynôme $P(x)$. En déduire Δ .



Pour $x = a$, $\Delta = 0$ car deux colonnes sont identiques. De même, pour $x = b$ et pour $x = c$. Ainsi, a, b et c sont trois racines évidentes de $P(x)$. Ainsi :

$$P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$$

où k est le coefficient de x^3 . Ainsi :

$$\begin{aligned} k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & c_2 & c_3-c_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c)$$

3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = P(-i) \text{ pour } a = 1, b = i \text{ et } c = -1. \text{ Aussi :}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} &= (i-1) \underbrace{(-1-1)}_{-2} (-1-i) (-i-1) \underbrace{(-i-i)}_{-2i} (-i+1) \\ &= 4i \underbrace{(i-1)(-1-i)}_2 \underbrace{(-i-1)(-i+1)}_{-2} \\ &= -16i \end{aligned}$$

Ex 9

Reste de division euclidienne

NCVL

On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Déterminer une racine évidente de $X^3 + X^2 + X + 1$, et factoriser le polynôme. Quelles sont ses racines dans $\mathbb{C}$?



Soit $T(X) = X^3 + X^2 + X + 1$. On remarque que $T(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$. Ainsi : -1 est racine de T ou encore $(X + 1)$ divise $T(X)$:

$$\begin{aligned} T(X) &= X^3 + X^2 + X + 1 = X(X^2 + 1) + X^2 + 1 = (X + 1)(X^2 + 1) \\ &= (X + 1)(X + i)(X - i) \end{aligned}$$

Les racines de $T(X)$ dans $\mathbb{C}$ sont : $-1, i$ et $-i$.

2. Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n(X)$ et de trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On ne demande pas de déterminer $Q_n(X)$.



Par la division euclidienne de $P(X)$ par $T(X)$, il existe deux polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que :

$$P(X) = T(X)Q_n(X) + R_n(X)$$

Avec $d^\circ(R_n) < d^\circ(T) = 3$. Ainsi il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

3. Exprimer $P(-1), P(i)$ et $P(-i)$ en fonction de a_n, b_n et c_n , et en déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^3 + X^2 + X + 1$. On distinguera deux cas : $n = 2p$ (cas n pair) et $n = 2p + 1$ (cas n impair).



$$P(X) = X^n = \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_{=T(X)} \cdot Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On a : - $P(-1) = (-1)^n = \underbrace{T(-1)}_{=0} \cdot Q_n(-1) + a_n(-1)^2 + b_n(-1) + c_n$, donne :

$$\begin{aligned} n = 2p : & \quad (-1)^{2p} = 1 = a_n - b_n + c_n \\ n = 2p + 1 : & \quad (-1)^{2p+1} = -1 = a_n - b_n + c_n \end{aligned}$$

- $P(i) = (i)^n = T(i) \cdot Q_n(i) + a_n(i)^2 + b_n(i) + c_n$, donne :

$$= 0$$

$$\begin{aligned} n = 2p : & \quad (i)^{2p} = (-1)^p = -a_n + ib_n + c_n \\ n = 2p + 1 : & \quad (i)^{2p+1} = (-1)^p \cdot i = -a_n + ib_n + c_n \end{aligned}$$

- $P(-i) = (-i)^n = T(-i) \cdot Q_n(-i) + a_n(-i)^2 + b_n(-i) + c_n$, donne :

$$\begin{aligned} = 0 & \quad (-i)^{2p} = (-1)^p = -a_n - ib_n + c_n \\ n = 2p : & \quad (-i)^{2p+1} = -(-1)^p i = -a_n - ib_n + c_n \end{aligned}$$

Ainsi : - Pour $n = 2p$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p \\ -a_n - ib_n + c_n = (-1)^p \end{array} \right. & \xLeftrightarrow{\ell_1} \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ (-1 - i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ 2ib_n = 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^p) \\ c_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^p) \\ b_n = 0 \end{array} \right. \\ X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}(1 - (-1)^p)X^2 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^p) \end{aligned}$$

- Pour $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p \cdot i \\ -a_n - ib_n + c_n = -(-1)^p i \end{array} \right. & \xLeftrightarrow{\ell_1} \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p \cdot i \\ (-1 - i)b_n + 2c_n = -1 - (-1)^p i \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p \cdot i \\ 2ib_n = 2(-1)^p i \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) \\ c_n = \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) \\ b_n = (-1)^p \end{array} \right. \\ X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p)X^2 + (-1)^p X + \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) \end{aligned}$$

2 Fractions rationnelles

Version web

Ex 10

Division euclidienne et fractions rationnelles

yNs9

Soit les polynômes à coefficients réels $A(X) = X^3 + 2X - 5$ et $B(X) = X - 1$.

1. Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B .



On trouve :

$$A(X) = X^3 + 2X - 5 = \underbrace{(X-1)(X^2 + X + 3)}_{B(X)} - 2$$

2. En déduire les coefficients a, b, c et d de la décomposition en éléments simples de

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{X^3 + 2X - 5}{X - 1} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X - 1}$$



On en déduit :

$$\begin{aligned} F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} &= \frac{X^3 + 2X - 5}{X - 1} = \frac{(X - 1)(X^2 + X + 3) - 2}{X - 1} \\ &= \frac{(X - 1) \cdot (X^2 + X + 3)}{X - 1} - \frac{2}{X - 1} = X^2 + X + 3 - \frac{2}{X - 1} \end{aligned}$$

Ex 11

Elements simples

zAlF

Pour chacune des fractions rationnelles, indiquer s'il s'agit d'un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.

Fraction rationnelle	Oui	Non	Fraction rationnelle	Oui	Non
$F_1(X) = \frac{1}{(X+1)}$			$F_4(X) = \frac{X-1}{(X^2+1)}$		
$F_2(X) = \frac{1}{(X^2+1)}$			$F_5(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2}$		
$F_3(X) = \frac{1}{(X+1)^3}$			$F_6(X) = \frac{X^2+X+1}{(X^3+1)}$		



$F_1(X) = \frac{1}{(X+1)}$ est un élément simple car le dénominateur $(X+1)$ est un polynôme de degré 1 donc irréductible sur $\mathbb{R}$ et le numérateur est une constante, donc de degré $0(< 1)$. $F_2(X) = \frac{1}{(X^2+1)}$ est un élément simple car le dénominateur (X^2+1) est un polynôme de degré 2 irréductible sur $\mathbb{R}$ et le numérateur est une constante, donc de degré $0(< 2)$.

$F_3(X) = \frac{1}{(X+1)^3}$ est un élément simple car le dénominateur $(X+1)^3$ est constitué d'un polynôme de degré 1 irréductible sur $\mathbb{R}$, élevé à la puissance 3, et le numérateur est une constante, donc de degré $0(< 1)$. $F_4(X) = \frac{X-1}{(X^2+1)}$ est un élément simple car le dénominateur (X^2+1) est un polynôme de degré 2 irréductible sur $\mathbb{R}$, et le numérateur est un polynôme de degré $0(< 2)$. $F_5(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2}$ n'est pas un élément simple car le dénominateur $(X+1)^2$ est constitué d'un polynôme de degré 1 irréductible sur $\mathbb{R}$, élevé à la puissance 2, et le numérateur est un polynôme lui aussi de degré 1. $F_6(X) = \frac{X^2+X+1}{(X^3+1)}$ n'est pas un élément simple car le dénominateur (X^3+1) n'est pas un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme de degré 3.

Ex 12

Décomposition en éléments simples

z5R1

1. Vérifier que le polynôme $B(X) = X^2 - X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(X) = X^3 + 2X - 1$ par le polynôme $B(X)$, et en déduire les coefficients a, b, c et d de la décomposition en éléments simples de :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(B(X))^2} = \frac{X^3 + 2X - 1}{(X^2 - X + 1)^2} = \frac{aX + b}{(X^2 - X + 1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1}$$



$$A(X) = X^3 + 2X - 1 = \underbrace{(X^2 - X + 1)}_{B(X)} \cdot (X + 1) + 2X - 2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{A(X)}{(B(X))^2} = \frac{X^3 + 2X - 1}{(X^2 - X + 1)^2} \\ &= \frac{(X^2 - X + 1)(X + 1) + 2X - 2}{(X^2 - X + 1)^2} \\ &= \frac{2X - 2}{(X^2 - X + 1)^2} + \frac{X + 1}{X^2 - X + 1} \end{aligned}$$

2. En s'inspirant de la question précédente, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{-3X^2 + X - 3}{(X^2 + 1)^8}$$



$F(X)$ n'a pas de partie entière. Effectuons une division euclidienne de $-3X^2 + X - 3$ par $X^2 + 1$:

$$-3X^2 + X - 3 = (-3) \cdot (X^2 + 1) + X$$

en divisant par $(X^2 + 1)^8$:

$$F(X) = \frac{-3X^2 + X - 3}{(X^2 + 1)^8} = \frac{-3}{(X^2 + 1)^7} + \frac{X}{(X^2 + 1)^8}$$

Ex 13

Décomposition en éléments simples

pGze

1. Calculer la division euclidienne de $X^5 + 1$ par $X^4 - 2X^3 + X^2$.



$$X^5 + 1 = (X + 2) \cdot (X^4 - 2X^3 + X^2) + 3X^3 - 2X^2 + 1$$

2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2$.



$$X^4 - 2X^3 + X^2 = X^2 \cdot (X^2 - 2X + 1) = X^2 \cdot (X - 1)^2$$

3. On note $F(X) = \frac{X^5 + 1}{X^4 - 2X^3 + X^2}$. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.



$$F(X) = \frac{X^5 + 1}{X^4 - 2X^3 + X^2} = \frac{X^5 + 1}{X^2 \cdot (X-1)^2} = X + 2 + \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{(X-1)} + \frac{D}{(X-1)^2}$$

4. Calculer $\lim_{X \rightarrow 0} (X^2 \cdot F(X))$



$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 0} (X^2 \cdot F(X)) &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^2 \cdot (X^5 + 1)}{X^2 \cdot (X-1)^2} = 1 \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} X^2 \cdot \left[X + 2 + \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{(X-1)} + \frac{D}{(X-1)^2} \right] = B \end{aligned}$$

5. Calculer $\lim_{X \rightarrow 1} ((X-1)^2 \cdot F(X))$.



$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 1} ((X-1)^2 \cdot F(X)) &= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{(XA)^2 \cdot (X^5 + 1)}{X^2 \cdot (X-1)^2} = 2 \\ &= \lim_{X \rightarrow 1} (X-1)^2 \cdot \left[X + 2 + \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{(X-1)} + \frac{D}{(X-1)^2} \right] = D \end{aligned}$$

6. Calculer $F(-1)$ et $F(2)$ de deux façons différentes.



$$\begin{aligned} F(-1) &= \frac{(-1)^5 + 1}{(-1)^2 \cdot (-1-1)^2} = 0 \\ &= -1 + 2 + \frac{A}{-1} + \frac{1}{(-1)^2} + \frac{C}{(-1-1)} + \frac{2}{(-1-1)^2} = 2 - A - \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 2A + C = 5 \\ F(2) &= \frac{(2)^5 + 1}{(2)^2 \cdot (2-1)^2} = \frac{33}{4} \\ &= 2 + 2 + \frac{A}{2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{C}{(2-1)} + \frac{2}{(2-1)^2} = 4 + \frac{A}{2} + \frac{1}{4} + C + 2 \\ &\Rightarrow A + 2C = 4 \\ \begin{cases} 2A + C = 5 \\ A + 2C = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

7. En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.



$$F(X) = \frac{X^5 + 1}{X^4 - 2X^3 + X^2} = \frac{X^5 + 1}{X^2 \cdot (X-1)^2} = X + 2 + \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X-1)} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$