

Systèmes linéaires



Version web

Ex 1

Résolution de système linéaire

rB1j

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z - t = 5 \\ x + 2y + 4z - 3t = 10 \\ -x + 4y + 3z - 2t = 1 \\ 3x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$



On résout par opérations sur les lignes afin de faire apparaître un système triangulaire (principe du pivot de Gauss) et achever la résolution par substitution :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z - t = 5 \\ x + 2y + 4z - 3t = 10 \\ -x + 4y + 3z - 2t = 1 \\ 3x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_3 + \ell_4 \\ \ell_3 \leftarrow -\frac{1}{5}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y + 4z - 3t = 10 \\ y - 6z + 6t = -19 \\ z - t = 3 \\ -5y - 13z + 11t = -30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 5\ell_2 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y + 4z - 3t = 10 \\ y - 6z + 6t = -19 \\ z - t = 3 \\ -43z + 41t = -125 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 43\ell_3 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y + 4z - 3t = 10 \\ y - 6z + 6t = -19 \\ z - t = 3 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(2, -1, 1, -2)\}$$

Ex 2

Résolution de système linéaire à coefficients complexes

pWdA

Résoudre le système linéaire à coefficients complexes suivant :

$$\begin{cases} (1 + i)x + (1 - 2i)y + (-1 + 3i)z = 2 + i \\ x - 2y + z = 0 \\ ix + (2 - i)y - 2z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} (1+i)x + (1-2i)y + (-1+3i)z = 2+i \\ x - 2y + z = 0 \\ ix + (2-i)y - 2z = 0 \end{cases} \\
 & \begin{matrix} \ell_1 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_1 - (1+i)\ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - i\ell_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ((1-2i) + (2+2i))y + ((-1+3i) - (1+i))z = 2+i \\ ((2-i) + 2i)y + (-2-i)z = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y + (-2+2i)z = 2+i \\ (2+i)y + (-2-i)z = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y + (-2+i)z = 2+i \\ (-5i)z = -3-4i \end{cases} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \\ y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \\ z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \right) \right\}$$

Ex 3

Résolution de système linéaire à paramètre

JU08

Résoudre les deux systèmes linéaires suivants en distinguant les cas selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_1) & \begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}_2) & \begin{cases} x - 2y + mz = -m - 3 \\ y + z = m + 2 \\ 4x + y + 9z = 5m + 6 \\ x + y + 3z = 2m + 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$



Résolution de : $(S_1) \begin{cases} x + y + \lambda \cdot z = \lambda \\ x + \lambda \cdot y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ Calculons le déterminant associé à ce système :

- Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, par les formules de CRAMER :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 - C_3 & C_2 & C_3 \\ 2\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda(-\lambda + 1)}{-(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \text{ car } \ell_2 = \ell_3$$

La solution de (S_1) est : $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}, 0, \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$.

- Pour $\lambda = 1$: $(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ L'ensemble des solutions est :

$$\{(x, 1 - x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$$

- Pour $\lambda = -1$: $(S_1) \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \ell_1 - \ell_3 \Leftrightarrow 0 = -2 \text{ Impossible! Résolution de :}$

$$(S_2) \begin{cases} x - 2y + mz = -m - 3 \\ y + z = m + 2 \\ 4x + y + 9z = 5m + 6 \\ x + y + 3z = 2m + 3 \end{cases}$$

Remarque : $\ell_3 = 4\ell_4 - 3\ell_2$.

- Pour $m \in \mathbb{R}^*$, par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -m-3 & -2 & m \\ m+2 & 1 & 1 \\ 2m+3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -m-1 & -2 & m \\ m+1 & 1 & 1 \\ 2m+2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-m}$$

$$= \frac{-m(m+1)}{-m}$$

$$= m + 1$$

De même,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m-3 & m \\ 0 & m+2 & 1 \\ 1 & 2m+3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-m(m+2)}{-m} = m + 2$$

et enfin :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & 2m+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 3 & 3m+6 \end{vmatrix}}{-m} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-m} = 0$$

La solution est :

Ex 4

Résolution de système linéaire à paramètre

w04e

Résoudre le système d'équations suivant, où $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} y^3 \times z^5 = 2x^2 \\ x \times y^4 \times z^3 = 1 \\ x \times z^2 = 3y \end{cases}$$



On pose $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$, $Z = \ln(z)$ et on utilise les formules suivantes :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{matrix} \ell_1 \\ 11\ell_3 + 5\ell_2 \end{matrix} \begin{cases} X + 4Y + 3Z = 0 \\ Y + Z = \frac{\ln 2}{11} \\ 44Z = 11 \cdot \ln 3 + 5 \cdot \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{11 \cdot \ln 3 - 11 \cdot \ln 2}{44} \\ Y = \frac{-11 \cdot \ln 3 - \ln 2}{44} \\ Z = \frac{11 \cdot \ln 3 + 5 \ln 2}{44} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^X = e^{\frac{11}{44} \ln 3 - \frac{11}{44} \ln 2} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} \\ y = e^Y = e^{-\frac{11}{44} \ln 3 - \frac{1}{44} \ln 2} = 3^{-\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{1}{44}} \\ z = e^Z = e^{\frac{11}{44} \ln 3 + \frac{5}{44} \ln 2} = 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{44}} \end{cases}$$

Ex 5

Système linéaire à paramètre

AcJ1

1. Soit $M_a = \begin{pmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}$, calculer $\det(M_a)$ sous forme factorisée en fonction de $a \in \mathbb{R}$.



On a :

$$\begin{aligned} \Delta_a = \det(M_a) &= \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & -a & a+1 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} a-1 & a-2 \\ a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} a-1 & a-2 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} \\ &= a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

2. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $M_a X = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ admet une unique solution puis la déterminer par les formules de CRAMER.



Le système $M_a \cdot X = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ admet une unique solution ssi $\det(M_a) \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Dans ce cas, par les formules de CRAMER :

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a-1 & -a & a+1 \\ a & a-1 & a-2 \\ a & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 & & \\ \ell_2 & & \\ \ell_3 - \ell_2 & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-1 & -a & a+1 \\ a & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)[(a-1)^2 + a^2]$$

$$= (a+1)(2a^2 - 2a + 1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a+1 & a-1 & a+1 \\ a-2 & a & a-2 \\ 2a-1 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 - c_2 & c_2 & c_3 \\ a & a-1 & a+1 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = a^2[(2a-1) - (a-2)]$$

$$= a^2(a+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a-1 \\ a-2 & a-1 & a \\ 2a-1 & a-1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 & & \\ \ell_3 - \ell_2 & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a-1 \\ a-2 & a-1 & a \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)[(a-1)^2 + a^2]$$

$$= -(a+1)(2a^2 - 2a + 1)$$

$$S_a = \left\{ \left(\frac{2a^2 - 2a + 1}{a(a-1)}, \frac{a}{(a-1)}, -\frac{2a^2 - 2a + 1}{a(a-1)} \right) \right\}$$

Ex 6

Résolution de système linéaire à paramètre, homogène et non homogène

2sPY

On considère les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 0 \\ my + z = 0 \\ (1-m)x - y - z = 0 \end{cases}$$

et :

$$(\mathcal{S}'_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 1 \\ my + z = 1 \\ (1-m)x - my - z = -2 \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

- Déterminer, suivant la valeur de m , le déterminant de la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{vmatrix} &= (m-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \cdot [(m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 1 - m + (m-1)] \\ &= m \cdot (m-1)^2 \cdot (m+1) \end{aligned}$$

Donc $\det(A_m) \neq 0$ si et seulement si $m \notin \{-1, 0, 1\}$.

2. En déduire les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système $(\mathcal{S}_m)$ admet des solutions non nulles et, dans ces cas, résoudre le système.



Le système $(\mathcal{S}_m)$ est homogène. Il admet des solutions non nulles si et seulement si $\det(A_m) = 0 \iff m \in \{-1, 0, 1\}$.

Pour $m = 0$:

$$(\mathcal{S}_0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Pour $m = 1$:

$$(\mathcal{S}_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = -z \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \{(x, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Pour $m = -1$:

$$(\mathcal{S}_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

3. Trouver les solutions du système $(\mathcal{S}'_m)$ pour $m = 2$ et $m = -1$.



$$(\mathcal{S}'_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ -x - y - z = -2 \end{cases}$$

On a $\det A_2 = 2 \cdot (2-1)^2 \cdot (2+1) = 6 \neq 0$ donc le système est de CRAMER, il admet une unique solution que l'on détermine par les formules de CRAMER :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} & y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0 \\ & \Rightarrow \text{Sol} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{S}'_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 1 \\ -y + z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ -y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Donc

$$S = \left\{ \left(z - \frac{3}{2}, z - 1, z \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex 7

Système linéaire avec trop d'inconnues

E7RW

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 + a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$



On a :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \\ 4x_4 = 4 + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \\ 0 = a \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$, le système n'a pas de solution ; - Si $a = 0$, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions est

$$\{(x_1, x_2, 1 - 3x_1 - 4x_2, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$