

Déterminants



Version web

Ex 1

Déterminant nul

tQCJ

Sans calculs (ou presque), justifier que les déterminants suivants sont nuls.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 7 \\ 16 & 25 & 31 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 14 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$



Voir si on peut former une combinaison linéaire de lignes ou de colonnes qui donne 0.

Ex 2

Calcul de déterminants de matrices triangulaires

vnJs

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -54 & 120 & -40 \\ 0 & 3 & -56 & 132 \\ 0 & 0 & -5 & 212 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$



On peut réaliser des combinaisons invariantes pour le déterminant afin d'obtenir une matrice triangulaire, ou bien développer par rapport à une ligne ou une colonne.

Ex 3

Factoriser dans un déterminant

qjd1

Soit $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Justifier que $\det P = 0$.

Ex 4

Déterminant d'un produit

1CvU

Soient A et B deux matrices carrées telles que $\det(AB) = -2$, $\det(B) > 0$, et $B = B^{-1}$. Déterminer $\det(A)$.

Ex 5

Déterminant d'un produit

k0Vx

1. En utilisant le déterminant, justifier l'existence d'une matrice A vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A$$

puis déterminer A .

i

Calculer et utiliser l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Peut-on déterminer une matrice B telle que :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ?$$

Ex 6

Calcul de déterminant

b14k

Calculer les déterminants ci-dessous en indiquant la méthode de calcul :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & x & x & x & x \\ -x & 0 & x & x & x \\ -x & -x & 0 & x & x \\ -x & -x & -x & 0 & x \\ -x & -x & -x & -x & 0 \end{vmatrix}$$

Ex 7

Déterminant de Vandermonde

Fe1h

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b)$$

Ex 8

Calcul de déterminant

AGDn

Calculer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix},$$

où a et b sont deux réels non nuls.

Faire apparaître des 0 par opérations sur les lignes ou les colonnes. On peut ainsi factoriser par $(a^2 - b^2)$ deux fois successivement.

Ex 9

Matrices inversibles

MPPL

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Dans l'affirmative, déterminer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



On peut calculer le déterminant de chaque matrice puis inverser en utilisant la comatrice.

Ex 10

Matrices inversibles

femq

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } x \in \mathbb{C}$$

Ex 11

Matrices inversibles

PxjQ

Déterminer a tel que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$ soit inversible. Déterminer alors son inverse.



On calcule le déterminant de M_a en fonction de a et on résout l'équation $\det(M_a) = 0$.