



Déterminants

Version web

Ex 1

Déterminant nul

tQCJ

Sans calculs (ou presque), justifier que les déterminants suivants sont nuls.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 7 \\ 16 & 25 & 31 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 14 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$



La matrice comporte une ligne de zéro donc par propriété du déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 7 \\ 16 & 25 & 31 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pour le calcul de Δ_2 , on remarque que $C_3 = C_1 + C_2$, donc :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ex 2

Calcul de déterminants de matrices triangulaires

vnJs

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -54 & 120 & -40 \\ 0 & 3 & -56 & 132 \\ 0 & 0 & -5 & 212 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$$

Développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (2) - 0 + 2 \times (-2) = -2$$

On fait apparaître des 0 dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 3\ell_1]{\ell_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + \ell_2]{\ell_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 = -1$$

On fait apparaître des 0 dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_1]{\ell_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 6\ell_2]{\ell_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-20) = -20$$

On fait apparaître des 0 dans la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & c_3 & j_4 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j_1 + c_3 & c_2 - 2c_3 & j_3 & j_4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (-1) \times \left[3 \times \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -[3 \times 3 - 1 \times (-4) + (-4) \times 1]$$

$$= -9$$

Le déterminant est triangulaire. Il est donc égal au produit des termes de la diagonale :

$$\begin{vmatrix} 2 & -54 & 120 & -40 \\ 0 & 3 & -56 & 132 \\ 0 & 0 & -5 & 212 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-5) \times 4 = -120$$

Ex 3

Factoriser dans un déterminant

qjd1

Soit $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Justifier que $\det P = 0$.



On remarque que l'on peut mettre : - a en facteur de la première ligne ; - b en facteur de la deuxième ligne ; - c en facteur de la troisième ligne ; Ainsi :

$$\det P = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Ex 4

Déterminant d'un produit

1CVu

Soient A et B deux matrices carrées telles que $\det(AB) = -2$, $\det(B) > 0$, et $B = B^{-1}$. Déterminer $\det(A)$.



On a $\det(A \cdot B) = \det(A) \times \det(B) = -2$, et $B = B^{-1} \Rightarrow \det(B) = \det(B^{-1})$. Or $\det(B^{-1}) = (\det(B))^{-1}$, aussi :

$$\det(B) = \det(B^{-1}) = (\det(B))^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \Leftrightarrow (\det(B))^2 = 1 \Leftrightarrow \det(B) = \pm 1$$

Puisque $\det(B) > 0$, $\det(B) = +1$ et $\det(A) = -2$.

Ex 5

Déterminant d'un produit

k0Vx

1. En utilisant le déterminant, justifier l'existence d'une matrice A vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A$$

puis déterminer A .



Remarque : Compte-tenu des règles du produit matriciel, si elles existent, les matrices A et B sont des matrices 3×3 . Puisque $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible

et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id} \cdot A = A$$

On calcule $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ par l'une ou l'autre méthode d'inversion.

Méthode 1 : Par la méthode du pivot de Gauss. Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutons la première et la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons la première ligne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons la deuxième ligne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Retranchons la troisième ligne de la première :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

2. Peut-on déterminer une matrice B telle que :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ?$$



En revanche, puisque $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \det(M \times N) = \det(M) \times \det(N)$, il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ car $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex 6

Calcul de déterminant

b14k

Calculer les déterminants ci-dessous en indiquant la méthode de calcul :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & x & x & x & x \\ -x & 0 & x & x & x \\ -x & -x & 0 & x & x \\ -x & -x & -x & 0 & x \\ -x & -x & -x & -x & 0 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \left(\begin{array}{l} l'_1 = l_2 \\ l'_2 = l_1 \\ l'_3 = l_3 \\ l'_4 = l_4 \end{array} \right) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} \left(\begin{array}{l} l''_1 = l'_1 \\ l'_1 = l'_2 - 2l'_1 \\ l''_3 = l'_3 + l'_1 \\ l''_4 = l'_4 - 2l'_1 \end{array} \right) \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3 - 2 + 15 + 3 + 3 - 10) = 3 \cdot 6 \\ &= 18 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} x & x & x & x & x \\ -x & 0 & x & x & x \\ -x & -x & 0 & x & x \\ -x & -x & -x & 0 & x \\ -x & -x & -x & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 & C_4 - C_1 & C_5 - C_1 \\ -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x & 2x & 2x \\ -x & 0 & 0 & 2x & 2x \\ -x & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= x \cdot \begin{vmatrix} x & 2x & 2x & 2x \\ 0 & x & 2x & 2x \\ 0 & 0 & x & 2x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= x^5 \end{aligned}$$

Ex 7

Déterminant de Vandermonde

Fe1h

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b)$$



$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} j_1 & j_2 - j_1 & j_3 - j_1 \\ a & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & j_3 - c_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(c-b)
 \end{aligned}$$

Ex 8

Calcul de déterminant

AGDn

Calculer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix},$$

où a et b sont deux réels non nuls.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \ell_2 - \ell_3 \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 0 & 0 & b^2 - a^2 \\ 0 & a^2 - b^2 & b^2 - a^2 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 - b^2)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ (a+b)^2 & b^2 & a^2 & ab \\ (a+b)^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a-b)^2 \cdot (a+b)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \cdot (a+b)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & b^2 & a^2 \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix} \\
 \Delta' &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & b^2 & a^2 \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & b^2 & a^2 + b^2 \\ 1 & ab & 2ab \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a^2 + b^2 \\ 1 & 2ab \end{vmatrix} = a^2 + b^2 - 2ab \\
 \Delta &= (a-b)^4 \cdot (a+b)^4
 \end{aligned}$$

Ex 9

Matrices inversibles

MPPL

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Dans l'affirmative, déterminer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \times 3 - 5 \times 1 = -11 \neq 0$, donc A inversible. Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a.d-b.c \neq 0$, $M^{-1} = \frac{1}{a.d-b.c} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc B inversible. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned} B_{11} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & B_{12} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & B_{13} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ B_{21} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 & B_{22} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & B_{23} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ B_{31} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 & B_{32} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7 & B_{33} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

inversible. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned} C_{11} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 & C_{12} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & C_{13} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 4 \\ C_{21} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -10 & C_{22} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 & C_{23} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5 \\ C_{31} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 & C_{32} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & C_{33} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -10 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex 10

Matrices inversibles

femq

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } x \in \mathbb{C}$$



$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale dont le déterminant est non nul :

$$\det A = (-3) \times (2i) \times (3+4i) \times (-2) \neq 0$$

Elle est donc inversible, et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3+4i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale dont le déterminant est nul : } B \text{ n'est pas inversible.}$$

$$\det B = 1 \times 0 \times i \times 2 = 0$$

$$\det C = \begin{vmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0 \text{ car } \ell_2 = -2\ell_4. \text{ Donc } C \text{ n'est pas inversible.}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice } 2 \times 2 \text{ dont le déterminant est non nul :}$$

$$\det D = (-2) \times 2 - 1 \times (-3) = -1 \neq 0$$

D est inversible, et :

$$D^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \text{ est une matrice } 2 \times 2 \text{ dont le déterminant est nul :}$$

$$\det E = 2 \times (-6) - 3 \times (-4) = 0$$

E n'est pas inversible. $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice carrée, elle n'est donc pas inversible.

$$\det(G) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 \times 3 = x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{6\} :$$

$$G^{-1} = \frac{1}{x-6} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-6} & \frac{-3}{x-6} \\ \frac{-2}{x-6} & \frac{x}{x-6} \end{pmatrix}$$

Ex 11

Matrices inversibles

PxjQ

Déterminer a tel que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$ soit inversible. Déterminer alors son inverse.



$$\begin{aligned}
 \det M_a &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & -1 & -c_1 \\ a & a & -1 \\ 2a & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} \\
 &= a \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -2a & 2a+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_2 \end{matrix} \\
 &= a \cdot [-1 \times [(-1) \times (2a+3) - (-2a) \times (-a)]] \\
 &= a \cdot \underbrace{(2a^2 + 2a + 3)}_{\text{discriminant } \Delta > 0}
 \end{aligned}$$

M_a inversible ssi $a \neq 0$. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a & M_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = -2a & M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a \\
 M_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & -a \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a+1 & M_{22} &= \begin{vmatrix} a+1 & -a \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a + 1 & M_{23} &= - \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\
 M_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 & M_{32} &= - \begin{vmatrix} a+1 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & M_{33} &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a + 1
 \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{M} &= \begin{pmatrix} 2a^2 + a & -2a & a \\ 2a+1 & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a^2 + 1 & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix} \\
 {}^t\tilde{M} &= \begin{pmatrix} 2a^2 + a & 2a+1 & a^2 + 1 \\ -2a & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour $a \neq 0$:

$$M_a^{-1} = \frac{1}{a \cdot (2a^2 + 2a + 3)} \begin{pmatrix} 2a^2 + a & 2a+1 & a^2 + 1 \\ -2a & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix}$$