

Calculs matriciels



Version web

Ex 1

Produit matriciel

tOmY

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?
2. Quels sont les produits matriciels (de 2 matrices) possibles ?

Ex 2

Produit matriciel

TORD

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^T \times A$ et $A \times A^T$ où A^T désigne la matrice transposée de A .

Ex 3

Produit matriciel

FaOL

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A-t-on $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$? Justifier.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité.

Ex 4

Produit matriciel et inverse

1Zfc

Soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. où a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que remarque-t-on ?

- Déterminer A^k pour tout entier $k \geq 1$.
- À quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ? Déterminer dans ce cas A^{-1} puis A^{-k} pour tout entier $k \geq 1$.

Ex 5

Modélisation et matrices

tLxt

Voici les ventes d'une buvette lors d'un festival de musique, ainsi que les prix pratiqués en euros :

Ventes	Sandwichs	Frites	Boissons	Prix	€
Jour 1	70	110	225	Sandwichs	2,10
Jour 2	105	135	290	Frites	1,00
Jour 3	65	90	185	Boissons	0,50

- Traduire matriciellement ces données et calculer le bénéfice à l'aide d'un produit matriciel.
- Certains festivaliers ont laissé entendre au gérant de la buvette qu'il pratiquait des prix trop élevés. En prévision du festival de l'année prochaine, le gérant estime qu'en baissant les prix de 20%, il augmentera ses ventes de 20%. A-t-il intérêt à baisser ses prix ?

Ex 6

Complexes et matrices

cpBJ

L'ensemble des nombres complexes est défini par $\mathbb{C} = \{a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$. L'addition est définie par : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ et la multiplication est donnée par : $(a + ib) \times (c + id) = (a.c - b.d) + i(ad + bc)$. A chaque nombre complexe $a + ib$, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- On note par J la matrice associée au nombre i . Montrer que $J^2 = -I_2$, où I est la matrice identité.
- Si les matrices $M(a, b)$ et $M'(a', b')$ sont associées respectivement aux nombres $z = (a + ib)$ et $z' = (a' + ib')$, montrer que $M(a, b) \cdot M'(a', b')$ correspond au produit des nombres complexes : $z.z'$.
- Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ non nulle, évaluer la matrice inverse A^{-1} . Identifier le nombre complexe correspondant.

Ex 7

Inversibilité de matrices

z0hC

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits AB et AC . Que constate-t-on ?
2. La matrice A est-elle inversible ?

Ex 8

Inversibilité de matrices

sP11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Ex 9

Trace de matrices

svRW

On rappelle que si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors la trace de A est : $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (autrement dit $\text{Tr } A$ est la somme des termes de la diagonale de A).

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\text{Tr } A$ et $\det A$. Vérifier que $A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + (\det A)I_2 = 0$, où I_2 est la matrice identité 2×2 .
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .

Ex 10

Résolution d'équation matricielle

e3Me

Soient A et B deux matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Déterminer B .



Vérifier que A est inversible et donner son inverse.

Ex 11

Inverse de matrice et application

Sclr

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les trois matrices suivantes, dire laquelle est l'inverse de P en justifiant.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
 3. En déduire A^{-1} , A^{2n} et A^{2n+1} , pour $n \in \mathbb{N}$.



Calculer d'abord D^{-1} , D^{2n} et D^{2n+1} , pour $n \in \mathbb{N}$ et exprimer A en fonction de D .

Ex 12

Inverse de matrice

r111

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^{-1} et B^{-1} .



Utiliser le pivot de Gauss.

Ex 13

Inversibilité de matrice

vt62

VRAI-FAUX - Soit A une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $AA^T = A^T A$.
2. Si A est inversible, alors AA^T est inversible ;
3. Si A est inversible, alors $A + A^T$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.