



Calculs matriciels

Version web

Ex 1

Produit matriciel

tOmY

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?
2. Quels sont les produits matriciels (de 2 matrices) possibles ?



A est une matrice 1×3 , B est une matrice 2×1 , C est une matrice 3×2 , D est une matrice 2×2 et E est une matrice 3×3 . Seules D et E sont des matrices carrées. De ces deux matrices carrées, la seule qui est symétrique est la matrice D .

Les produits possibles sont :

1. $A \times C$ et la matrice produit est de type 1×2 ;
2. $A \times E$ et la matrice produit est de type 1×3 ;
3. $B \times A$ et la matrice produit est de type 2×3 ;
4. $C \times B$ et la matrice produit est de type 3×1 ;
5. $C \times D$ et la matrice produit est de type 3×2 ;
6. $D \times B$ et la matrice produit est de type 2×1 ;
7. $D \times D = D^2$ et la matrice produit est de type 2×2 ;
8. $E \times C$ et la matrice produit est de type 3×2 ;
9. $E \times E$ et la matrice produit est de type 3×3 ;

Ex 2

Produit matriciel

TORD

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^T \times A$ et $A \times A^T$ où A^T désigne la matrice transposée de A .



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$({}^tA) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot ({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex 3

Produit matriciel

FaOL

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A-t-on $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$? Justifier.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité.



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$$

Justification :

$$(A + B)(A - B) = A^2 - \underbrace{AB + BA}_{\neq 0} - B^2$$

car $BA \neq AB$. Pour avoir l'égalité, il faut et il suffit que A et B commutent : $BA = AB$.

Ex 4

Produit matriciel et inverse

1Zfc

Soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. où a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que remarque-t-on ?



On remarque que $AB = BA = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$

2. Déterminer A^k pour tout entier $k \geq 1$.



On déduit de la question précédente que $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ puis par récurrence que :

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

3. À quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ? Déterminer dans ce cas A^{-1} puis A^{-k} pour tout entier $k \geq 1$.



Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Ex 5

Modélisation et matrices

tLxt

Voici les ventes d'une buvette lors d'un festival de musique, ainsi que les prix pratiqués en euros :

Ventes	Sandwichs	Frites	Boissons	Prix	€
Jour 1	70	110	225	Sandwichs	2,10
Jour 2	105	135	290	Frites	1,00
Jour 3	65	90	185	Boissons	0,50

1. Traduire matriciellement ces données et calculer le bénéfice à l'aide d'un produit matriciel.



Soient les matrices V (ventes), P (prix) et B (bénéfices) :

$$V = \begin{pmatrix} 70 & 110 & 225 \\ 105 & 135 & 290 \\ 65 & 90 & 185 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2,10 \\ 1 \\ 0,50 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

où les coefficients de B sont les bénéfices journaliers : b_i bénéfice du jour $n^\circ i$. On a :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = V \cdot P = \begin{pmatrix} 70 & 110 & 225 \\ 105 & 135 & 290 \\ 65 & 90 & 185 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,10 \\ 1 \\ 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 369,5 \\ 500,5 \\ 319 \end{pmatrix}$$

Le bénéfice total est la somme de ces bénéfices journaliers, que l'on obtient en effectuant le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 + b_2 + b_3$$

Ici, il vaut :

$$369,50 + 500,50 + 319 = 1189$$

2. Certains festivaliers ont laissé entendre au gérant de la buvette qu'il pratiquait des prix trop élevés. En prévision du festival de l'année prochaine, le gérant estime qu'en baissant les prix de 20%, il augmentera ses ventes de 20%. A-t-il intérêt à baisser ses prix ?



Baisser les prix de 20% revient à multiplier la matrice P par 0,80 . Augmenter les ventes de 20% revient à multiplier la matrice V par 1,20 . Dans ce cas le bénéfice total devient : Ce qui revient à une diminution de 4% du bénéfice total. Il ne doit donc pas suivre ce conseil !

Ex 6

Complexes et matrices

cpBJ

L'ensemble des nombres complexes est défini par $\mathbb{C} = \{a + ib/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$. L'addition est définie par : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ et la multiplication est donnée par : $(a + ib) \times (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(ad + bc)$. A chaque nombre complexe $a + ib$, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. On note par J la matrice associée au nombre i . Montrer que $J^2 = -I_2$, où I est la matrice identité.



$$J = M(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 = -M(1, 0) = M(-1, 0)$$

2. Si les matrices $M(a, b)$ et $M'(a', b')$ sont associées respectivement aux nombres $z = (a + ib)$ et $z' = (a' + ib')$, montrer que $M(a, b) \cdot M'(a', b')$ correspond au produit des nombres complexes : $z \cdot z'$.



$$M(a, b) \cdot M'(a', b') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix}$$

$z \cdot z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (a \cdot a' - b \cdot b') + i(ab' + ba')$ a pour matrice associée :

$$M(a \cdot a' - b \cdot b', ab' + ba') = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix} = M(a, b) \cdot M'(a', b')$$

3. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ non nulle, évaluer la matrice inverse A^{-1} . Identifier le nombre complexe correspondant.



$$M(a, b) \cdot M'(a', b') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot a' - b \cdot b' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot a' - b \cdot b' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} al_1 + bl_2 \\ bl_1 - al_2 \end{cases} \begin{cases} (a^2 + b^2) a' = a \\ (-a^2 - b^2) b' = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ b' = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

L'inverse de $M(a, b) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, associé au nombre complexe $z = a + i \cdot b$ est définie à condition que $a^2 + b^2 \neq 0$ autrement dit si $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette inverse est :

$$A^{-1} = M'(a', b') = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & -\frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

C'est la matrice associée à $z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$.

Ex 7

Inversibilité de matrices

z0hC

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits AB et AC . Que constate-t-on ?
2. La matrice A est-elle inversible ?



On a :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$A \cdot B = A \cdot C$$

Montrons que la matrice A n'est pas inversible. (Démonstration par l'absurde.) Supposons que A soit inversible, notons A^{-1} son inverse. On aurait :

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C \Leftrightarrow B = C$$

Or $B \neq C$. Donc A n'est pas inversible.

Ex 8

Inversibilité de matrices

sPl1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

On en déduit :

$$A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A = I_3 \Leftrightarrow A \cdot \underbrace{(A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I_3)}_{=A^{-1}} = I_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I_3$$

Ex 9

Trace de matrices

svRW

On rappelle que si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors la trace de A est : $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (autrement dit $\text{Tr } A$ est la somme des termes de la diagonale de A).

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\text{Tr } A$ et $\det A$. Vérifier que $A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + (\det A)I_2 = 0$, où I_2 est la matrice identité 2×2 .
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .



On a $\text{Tr } A = 3 + 3 = 6$ et $\det A = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$. Par ailleurs :

$$A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + (\det A)I_2 = A^2 - 6 \cdot A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\det A = 5 \neq 0$, on sait que A est inversible, donc A^{-1} existe. On multiplie l'égalité ci-dessus à gauche par A^{-1} , on obtient :

$$A^{-1} \cdot (A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + (\det A)I_2) = A - (\text{Tr } A) \cdot I_2 + (\det A)A^{-1} = 0$$

Finalement, ceci donne que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Tr}(A) \cdot I_2 - A) = \frac{1}{5}(6I - A) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex 10

Résolution d'équation matricielle

e3Me

Soient A et B deux matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Déterminer B .



On détermine d'abord A^{-1} par pivot de Gauss ou une autre formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis on déduit que $B = IB = A^{-1}AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ex 11

Inverse de matrice et application

Sclr

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les trois matrices suivantes, dire laquelle est l'inverse de P en justifiant.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



On a :

$$P \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \neq Id$$

donc $P^{-1} \neq B$

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

et $P^{-1} = C$ Par unicité de la matrice inverse, sans calcul, on peut affirmer $P^{-1} \neq D$.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.



$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

3. En déduire A^{-1} , A^{2n} et A^{2n+1} , pour $n \in \mathbb{N}$.



On a :

$$\begin{aligned} D^2 &= D \cdot D = I \Rightarrow F^{-1} = F \\ (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} &= P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \\ \Rightarrow A^{-1} \cdot P &= P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = A \cdot P \\ \Rightarrow A^{-1} &= A \cdot P \cdot P^{-1} = A \end{aligned}$$

Donc $A^{-1} = A$ d'où $A^2 = I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit par récurrence que $A^{2n} = I$ et $A^{2n+1} = A$.

Ex 12

Inverse de matrice

r111

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^{-1} et B^{-1} .



Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la deuxième ligne 2 fois la première et à la troisième ligne 1 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la deuxième et de la troisième ligne et permutons les lignes 2 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la troisième ligne 7 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne 3 fois la troisième ligne et ajoutons à la deuxième ligne la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & -21 \\ 6 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la première ligne 4 fois la deuxième ligne :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 11 \\ 6 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Soient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la troisième ligne a fois la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la deuxième ligne a fois la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne a fois la deuxième :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 13

Inversibilité de matrice

vt62

VRAI-FAUX - Soit A une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $AA^\top = A^\top A$.



FAUX : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. $A \cdot (A^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors que $(A^\top) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Si A est inversible, alors $AA^\top$ est inversible ;



VRAI : Si A est inversible, alors $(A^\top)$ est aussi inversible avec $(A^\top)^{-1} = {}^t(A)^{-1}$. Et le produit de deux matrices inversibles est inversible, donc $A \cdot (A^\top)$ est aussi inversible.

3. Si A est inversible, alors $A + A^\top$ est inversible.



FAUX : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, alors que $A + (A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

4. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.



FAUX : A est semblable à la matrice identité signifie qu'il existe une matrice inversible P telle que : $P^{-1} \cdot A \cdot P = Id \Leftrightarrow A = P \cdot Id \cdot P^{-1} = Id$. Donc, si A est inversible et $A \neq Id$, A n'est semblable à la matrice identité. La seule matrice semblable à l'identité est elle-même !