

Exercices de cours



1 Densité et fonction de répartition

Ex 1

Densité de probabilité

xTI2

Soit la fonction $f = \frac{1}{3} \mathbf{1}_{[-1;2]}$.

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f . Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.

Ex 2

Calcul de probabilité

51mL

Soit une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

i

Vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout x réel et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

2. Écrire f à l'aide d'une fonction indicatrice $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.

i

Prendre l'indicatrice de l'ensemble sur lequel la fonction f n'est pas nulle et multiplier par la valeur souhaitée (ici $2x$).

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité. Calculer $P(X \leq \frac{1}{2})$ et $P(-1 \leq X \leq 0.2)$.

Ex 3

Fonction de répartition

gsn9

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f définit bien une fonction densité, puis déterminer la fonction de répartition F_X de X .

i

On revient à la définition : on pose $t \in \mathbb{R}$ quelconque et on calcule $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.

2. Exprimer $P(-1 \leq X \leq 1)$ en fonction de F_X et en déduire une valeur numérique.



Le résultat dépend de λ qui est le paramètre de cette loi.

Ex 4

Fonction de répartition, démonstration de cours

j18R

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X quelconque. Démontrer que F est une fonction croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Ex 5

Démonstration de cours sur la fonction de répartition

wjwa

Soit F_X une fonction de répartition admettant un point de discontinuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que le saut $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$ est égal à $P(X = x_0)$.

Ex 6

Changement de variable

oNkJ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0; 2])$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X .
2. Déterminer la fonction de répartition de Y .
3. Calculer la probabilité $P(Y = 1)$.
4. La variable aléatoire Y est-elle discrète ? absolument continue ? Justifier.

Ex 7

Propriété des fonctions de répartition

M00y

★ ★ ★

Soit la fonction F définie pour tout x réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions sur les réels a et b de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X .



On ne demande pas ici que X soit une variable aléatoire à densité. Il faut donc trouver des conditions pour que les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F soient correctes, que F soit croissante sur $\mathbb{R}$ et continue à droite.

2. À quelles conditions cette fonction F définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?



Il faut ajouter une condition supplémentaire : F doit être continue en tout point de $\mathbb{R}$ et pas seulement continue à droite.

2 Changement de variable

Ex 8

Fonctions de répartition et changement de variable

Louq

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On rappelle que X admet pour densité :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

A l'aide d'une fonction de répartition, déterminer la loi de la variable aléatoire $2X$.

Ex 9

Changement de variable

yTDM

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$$

On cherche à identifier la loi de $Y = X^2$.



Exprimer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .

Ex 10

Fonctions de répartition et changement de variable

tNNT

Soit f une fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. On définit X une variable aléatoire admettant f comme densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire $Y = X^2$ en fonction de celle de X . En déduire la densité de la variable Y .

3 Lois usuelles et espérance

Ex 11 Etude d'une loi de probabilité

j4xc

★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Calculer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue X .

i

Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

2. Déterminer $P(X \leq \frac{1}{3})$ et $P(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3})$.

i

Le deuxième calcul est une probabilité conditionnelle : appliquer la formule de Bayes.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

i

On applique la définition pour calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour le calcul de $V(X)$, on calcule dans un premier temps $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert.

Ex 12 Paramètres de la loi uniforme

j7Pn

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Ex 13 Loi de Cauchy

z2ZN

Soit f une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire admettant f pour densité.
2. Montrer que X n'admet pas de moment d'ordre 1.
3. Calculer la fonction de répartition de X .
4. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \arctan(X)$ et en déduire sa loi.

Ex 14

Moments de la loi exponentielle

Z8Dq

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer l'existence des moments d'ordre n de X pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis les calculer.

4 Loi normale

La densité suivante définit la loi normale centrée réduite : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (calcul de l'intégrale de Gauss).

Ex 15

Propriétés de la loi normale centrée réduite

ItUH

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Justifier que $P(Z > 0) = \frac{1}{2}$ et que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $P(Z < -a) = P(Z > a)$.

Ex 16

Démonstrations de cours pour la loi normale

1z1J

Soit X une variable aléatoire dont la loi est déterminée par la fonction densité définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixés.

1. A l'aide d'un changement de variable, calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Calculer la variance de X .
3. Soit $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Déterminer la loi de Z .

i

On peut exprimer la fonction de répartition de Z et retrouver la densité d'une loi normale centrée réduite après dérivation.

Ex 17

Loi normale, calculs numériques

qoul

1. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(-1.2 \leq Z \leq 1.1)$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(70 \leq QI \leq 130)$ où QI suit une loi $\mathcal{N}(100, \sigma = 15)$.
3. A l'aide des tables de valeurs, déterminer un réel t tel que $P(|X - 5| < t) = 95\%$ où X suit une loi $\mathcal{N}(5, \sigma = 1)$.

5 Couple de variables aléatoires

Ex 18 Densité

SxZb

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\mathbf{1}_{(\mathbb{R}_+)^2}(x, y).$$

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X > 1, Y < 1)$, $P(X < Y)$ et $P(X < a)$.

Ex 19 Lois marginales

T8Ws

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur le disque unité D centré en $(0, 0)$.

1. Déterminer le réel α tel que $f: (x, y) \mapsto \alpha \mathbf{1}_D(x, y)$ soit une densité caractérisant la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de X .

Ex 20 Densité d'une somme

ROSQ

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Ex 21 Densité d'une somme

kkMH

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Ex 22 Min et Max

oXIK

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable $\max(X_1, \dots, X_n)$ et en déduire la loi de cette variable aléatoire.
2. Calculer la loi de la variable $\min(X_1, \dots, X_n)$.

6 Inégalités, approximations

Ex 23

Estimation par inégalité

g115

Une population de personnes doit voter à l'élection présidentielle. La proportion souhaitant voter pour la candidate Mme A. est inconnue, on la note p . Pour approcher cette valeur, on effectue un sondage sur n personnes : l'échantillon est modélisé par une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_1, \dots, X_n)$ suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p ($X_i = 1$ si le i -ème individu souhaite voter pour Mme A., $X_i = 0$ sinon).

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ de sorte que $\frac{S_n}{n}$ représente la proportion de personnes votant pour Mme A. dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

4. Comment choisir la taille de l'échantillon de sorte que le résultat du sondage soit proche de p à $\varepsilon = 0.05$ près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Ex 24

Optimisation par approximation

OuqI

Un usager de train effectue régulièrement 100 trajets par mois en première classe. On admet qu'à chacun de ses voyages, cet usager a une chance sur dix d'être contrôlé.

On suppose que cet usager fraude systématiquement en voyageant en première classe avec un titre de transport de seconde classe. La différence entre le prix d'un billet de première classe et celui d'un billet de seconde classe est de 1 euro. En cas de contrôle, le montant de l'amende à payer est noté α euros.

Quel est le montant minimum de l'amende α qu'il faudrait infliger à cet usager pour qu'il soit dissuadé de frauder en étant financièrement perdant à la fin du mois avec une probabilité supérieure à 95% ?

Ex 25

Application du théorème central limite

alNi

Soit $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 16$. Soit $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Quelle est la distribution de la variable aléatoire S selon le théorème central limite ?

Calculez la probabilité que la somme S soit inférieure à 2900.

Exercices type examen



Ex 26

Simulation d'une loi normale

C5Fq

On tire sur une cible munie d'un repère orthonormé centrée sur son origine O . On note (X, Y) les coordonnées cartésiennes d'un tir. On remarque que lorsque le tireur vise le centre de la cible, la loi suivie par (X, Y) admet une densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}}$$

On note R la distance entre le point d'impact et le point visé.

1. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Ecrire la fonction de répartition de R sous la forme d'une intégrale double, puis effectuer le changement de variables en coordonnées polaires pour simplifier l'expression.
3. En déduire une densité de R . La loi obtenue s'appelle la loi de Rayleigh .
4. Montrer que R^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.
5. Montrer que si Θ est la variable aléatoire telle que $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$, alors Θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
6. En déduire une simulation de la loi du couple (X, Y) .

Ex 27

Files d'attente

9hTr

On considère deux files d'attente indépendantes. Deux personnes arrivent simultanément et se présentent respectivement aux deux files d'attente. On note X le temps d'attente de la première personne, Y le temps d'attente de la seconde personne, en minutes. On supposera que X et Y suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

1. Quel est le temps d'attente moyen pour chaque personne ?
2. Quelle est la densité de la variable X^2 ? la variable $-Y$?
3. Calculer la probabilité que la différence d'attente entre les deux personnes soit inférieure à 1 minute.

Ex 28

Mélange de lois, fonction de répartition

cRYI

Soit Z une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_Z définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Graphique : <https://www.geogebra.org/m/vat8nub8>

1. Vérifier que F_Z définit bien une fonction de répartition.
2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$. Peut-on dire que Z est une variable aléatoire absolument continue ?
3. On considère $Y: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $P(Y = k) = \alpha P(Z = k)$ pour tout $k \in \{0; 1\}$ où α est un paramètre réel à déterminer.
 - (a) Montrer que nécessairement, $\alpha = \frac{12}{5}$.
 - (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y .
4. On pose $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction F .
5. Démontrer qu'en multipliant F par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X .
6. Déterminer une densité de probabilité de la variable X .

Ex 29

Suite de variables aléatoires

ZT9T

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1 - \theta)1_{[-\frac{1}{2}; 0]}(x) + (1 + \theta)1_{]0; \frac{1}{2}]}(x)$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. A quelles conditions sur θ la fonction f_θ est bien une densité de probabilité ?
2. Calculer l'espérance de X .
3. Soient n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X . On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty; 0]}(X_i) \quad V_n = \sum_{i=1}^n 1_{]0; +\infty[}(X_i)$$

- (a) Vérifier que si $1 \leq i \leq n$ alors la variable aléatoire $1_{]0; +\infty[}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
- (b) En déduire que V_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- (c) Vérifier que la variable aléatoire $U_n + V_n$ est constante.
- (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{V_n - U_n}{n}$.
- (e) Vérifier que $\mathbb{E}(U_n V_n) = (n^2 - n)\frac{1-\theta^2}{4}$ et en déduire $\text{cov}(U_n, V_n)$.
- (f) Montrer que la variance de $\frac{V_n - U_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Ex 30

Lois, fonctions caractéristiques pour un couple

xC03

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = k(1 + xy(x^2 - y^2))\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y).$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité associée à un couple de variables aléatoires (X, Y) .
2. Déterminer les densités marginales du couple (X, Y) , ainsi que leurs fonctions caractéristiques. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$.