

Exercices de cours



1 Densité et fonction de répartition

Ex 1

Densité de probabilité

xTI2

Soit la fonction $f = \frac{1}{3} \mathbf{1}_{[-1;2]}$.

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité.



On vérifie que f est une fonction positive et son intégrale vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{3}dx = 1$.

2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f . Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.



$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{3} \mathbf{1}_{[-1;2]} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Ex 2

Calcul de probabilité

51mL



Soit une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.



(a) f est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$.

Donc f est une densité de probabilité.

2. Écrire f à l'aide d'une fonction indicatrice $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.



$$f(x) = 2x \mathbf{1}_{[0;1]}(x).$$

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité. Calculer $P(X \leq \frac{1}{2})$ et $P(-1 \leq X \leq 0.2)$.



$$\begin{aligned}
 P(X \leq \frac{1}{2}) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx \\
 &= [x^2]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(-1 \leq X \leq 0.2) &= \int_{-1}^{0.2} f(x) dx \\
 &= \int_0^{0.2} 2x dx \\
 &= [x^2]_0^{0.2} \\
 &= 0.04
 \end{aligned}$$

Ex 3**Fonction de répartition**

gsn9

★ ★

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0;+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f définit bien une fonction densité, puis déterminer la fonction de répartition F_X de X .



Il suffit de vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

On détermine maintenant la fonction de répartition : soit $t \in \mathbb{R}$;

- si $t < 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$;
- si $t \geq 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. Exprimer $P(-1 \leq X \leq 1)$ en fonction de F_X et en déduire une valeur numérique.



$$\begin{aligned}
 P(-1 \leq X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(-1) \\
 &= (1 - e^{-\lambda}) - 0 \\
 &= 1 - e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

Ex 4

Fonction de répartition, démonstration de cours

j18R

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X quelconque. Démontrer que F est une fonction croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$.



Soit X une variable aléatoire : alors si $x \leq y$, on a l'inclusion d'événements $] - \infty; x] \subset] - \infty; y]$ puis par croissance d'une mesure de probabilité, $P(] - \infty; x]) \leq P(] - \infty; y])$ soit $F_X(x) \leq F_X(y)$. Le point 1 est démontré.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et une suite (h_n) qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \geq 0$. Quitte à extraire une sous-suite décroissante, on suppose que la suite (h_n) est décroissante. Alors $F_X(t + h_n) - F_X(t) = P(X \in]t; t + h_n])$. Or la suite d'événements (A_n) définie par $A_n = \{X \in]t; t + h_n])\}$ est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante, $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap A_n) = P(\emptyset) = 0$. Le point 2 est démontré.

Ex 5

Démonstration de cours sur la fonction de répartition

wjwa

Soit F_X une fonction de répartition admettant un point de discontinuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que le saut $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$ est égal à $P(X = x_0)$.



La limite à gauche se traduit par $F_X(x_0^-) = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} F_X(x_0 - h_n) = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} P(X \leq x_0 - h_n)$ donc $p_0 = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} P(X \in]x_0 - h_n; x_0])$.

Or la suite d'événements (B_n) définie par $B_n = \{X \in]x_0 - h_n; x_0])\}$ est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante, $P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap B_n) = P(\{x_0\})$.

Ex 6

Changement de variable

oNkJ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0; 2])$. On pose $Y = \max(1, X)$.

- Déterminer la fonction de répartition de X .



$$\text{C'est du cours : } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } t \in]0; 2[\\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} ; \mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } V(X) = 4/12 = 1/3.$$

- Déterminer la fonction de répartition de Y .



Soit $t \in \mathbb{R}$: $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\{1 \leq t\} \cap \{X \leq t\})$. On distingue trois cas :

Si $t \geq 2$: $P(Y \leq t) = 1$;

Si $1 \leq t < 2$: $P(Y \leq t) = P(X \leq t) = \frac{t}{2}$;

Si $t < 1$, $P(Y \leq t) = 0$.

On remarque que F_Y n'est pas continue en 1 (mais elle est bien continue à droite en 1).

- Calculer la probabilité $P(Y = 1)$.



On remarque que $Y = 1 \iff X \leq 1$ donc $P(Y = 1) = P(X \leq 1) = 1/2$.

On sait aussi d'après le cours que $P(Y = 1) = \lim_{1+} F_Y - \lim_{1-} F_Y = F_Y(1) - 0 = 1/2$.

4. La variable aléatoire Y est-elle discrète ? absolument continue ? Justifier.



La variable aléatoire Y n'est pas discrète car sa fonction de répartition n'est pas en escalier. Elle n'est pas non plus absolument continue car sa fonction de répartition n'est pas continue partout (discontinuité en 1).

Ex 7

Propriété des fonctions de répartition

M00y

★ ★ ★

Soit la fonction F définie pour tout x réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions sur les réels a et b de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X .
2. À quelles conditions cette fonction F définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?



Il est nécessaire que $b = 1$ pour que $\lim_{+\infty} F = 1$.

Pour que F soit croissante, il est nécessaire que $a \geq 0$ et $F(0^-) \leq F(0)$ soit $a \leq b - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas, F est bien continue à droite.

Réciproquement, F vérifie toutes les conditions suffisantes pour que F soit une fonction de répartition.

Si on ajoute la condition que $a = \frac{1}{2}$ alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et c'est la fonction de répartition d'une variable absolument continue.

2 Changement de variable

Ex 8

Fonctions de répartition et changement de variable

Louq

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On rappelle que X admet pour densité :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

A l'aide d'une fonction de répartition, déterminer la loi de la variable aléatoire $2X$.



Soit $t \in \mathbb{R}$ et F_{2X} la fonction de répartition de la variable aléatoire $2X$: alors

$$\begin{aligned} F_{2X}(t) &= P(2X \leq t) \\ &= P\left(X \leq \frac{t}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } 0 < t \leq 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_{2X} est dérivable presque partout (sauf en 0 et en 2). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité g de la variable $2X$. On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0;2]}(x)$$

et on conclut que $2X$ suit une loi uniforme sur $[0; 2]$.

Ex 9

Changement de variable

yTDM

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$$

On cherche à identifier la loi de $Y = X^2$.



1. pour tout t , $F_Y(t) = P(X^2 \leq t)$
2. si $t \geq 0$, $\{X^2 \leq t\} = \{X \in [-\sqrt{t}; \sqrt{t}]\}$;
si $t < 0$ $\{X^2 \leq t\} = \emptyset$
3. donc pour tout $t \geq 0$,

$$F_Y(t) = P(X \in [-\sqrt{t}; \sqrt{t}]) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) dx$$

$$\text{si } 0 \leq t \leq 1 \text{ alors } F_Y(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{t}$$

$$\text{si } t > 1 \text{ alors } F_Y(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$$

4. pour tout $t \in]0; 1[$, F_Y est dérivable en t et $F_Y'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc en intégrant, $F_Y(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ de sorte que $F_Y(0) = 0$ et $F_Y(1) = 1$.
Pour résumer ces conditions, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x) dx$$

On en déduit que Y admet pour densité la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$

Ex 10

Fonctions de répartition et changement de variable

tNNT

Soit f une fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. On définit X une variable aléatoire admettant f comme densité.



Il suffit de vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire $Y = X^2$ en fonction de celle de X . En déduire la densité de la variable Y .



Soit $t \in \mathbb{R}$ et F_{X^2} la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2 : alors

$$\begin{aligned}
 F_{X^2}(t) &= P(X^2 \leq t) \\
 &= \begin{cases} P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x) dx & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{t}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{\sqrt{t}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
 &= \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(t)
 \end{aligned}$$

La fonction F_{X^2} est dérivable presque partout (sauf en 0). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité g de la variable X^2 . On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(x)$$

et on conclut que X^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

3 Lois usuelles et espérance

Ex 11 Etude d'une loi de probabilité

j4xc

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Calculer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue X .



Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive sur $\mathbb{R}$ (ce qui est le cas ici) et que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Or

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 \lambda x dx = \left[\frac{\lambda}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{\lambda}{2}$$

donc $\lambda = 2$.

2. Déterminer $P(X \leq \frac{1}{3})$ et $P(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3})$.



$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x) dx = [x^2]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$P\left(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}\right)}{P(X > \frac{1}{3})} = \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x dx}{1 - P(X \leq \frac{1}{3})} = \frac{[x^2]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.



$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Ex 12 Paramètres de la loi uniforme

j7Pn

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.



Soit f une fonction densité de X . Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Pour calculer la variance $\mathbb{V}(X)$, il reste à calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3}\end{aligned}$$

puis on applique la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Ex 13

Loi de Cauchy

z2ZN

Soit f une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire admettant f pour densité.



Il suffit de vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Montrer que X n'admet pas de moment d'ordre 1.



On remarque que $x \times \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc par comparaison, la fonction $x \mapsto xf(x)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Donc X n'est pas intégrable et $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

3. Calculer la fonction de répartition de X .



Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^t f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_{-\infty}^t \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(t) \end{aligned}$$

4. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \arctan(X)$ et en déduire sa loi.



On sait que $-\frac{\pi}{2} \leq Y < \frac{\pi}{2}$. Donc si $t < -\frac{\pi}{2}$ alors $F_Y(t) = 0$ et si $t > \frac{\pi}{2}$ alors $F_Y(t) = 1$. Soit $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(X \leq \tan(t)) \\ &= \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_{-\infty}^{\tan(t)} \\ &= \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme $\mathcal{U}([-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$.

Ex 14

Moments de la loi exponentielle

Z8Dq

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer l'existence des moments d'ordre n de X pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis les calculer.



On sait par comparaison que la fonction $x \mapsto xe^{-\lambda x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc on peut calculer par théorème de transfert pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= \lambda \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[\frac{x^n e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{n}{\lambda} \mathbb{E}(X^{n-1}) \end{aligned}$$

De plus, on a immédiatement que $\mathbb{E}(X^0) = 1$ donc par récurrence, on obtient :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

4 Loi normale

La densité suivante définit la loi normale centrée réduite : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (calcul de l'intégrale de Gauss).

Ex 15

Propriétés de la loi normale centrée réduite

IttUH

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Justifier que $P(Z > 0) = \frac{1}{2}$ et que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $P(Z < -a) = P(Z > a)$.



On sait que $P(Z > 0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ par parité de la fonction intégrée. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ d'où le premier résultat. De même, on a par changement de variable $u = -x$ et parité :

$$P(Z < -a) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = - \int_{+\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P(Z > a)$$

Ex 16

Démonstrations de cours pour la loi normale

1z1J

Soit X une variable aléatoire dont la loi est déterminée par la fonction densité définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixés.

1. A l'aide d'un changement de variable, calculer $\mathbb{E}(X)$.



On exprime l'intégrale en posant le changement de variable affine $u = \frac{x - \mu}{\sigma} \iff x = \sigma u + \mu$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times 1 \\ &= \mu \end{aligned}$$

2. Calculer la variance de X .



On utilise le même changement de variable :

$$\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

devient, après changement de variables ci-dessus :

$$E((X - \mu)^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du.$$

En intégrant par parties, on trouve directement que

$$E((X - \mu)^2) = \sigma^2.$$

3. Soit $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Déterminer la loi de Z .



En effectuant toujours le même changement de variables $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$, on a pour tout réel t :

$$P(Z \leq t) = P(X \leq \sigma t + \mu) \int_{-\infty}^{\sigma t + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du.$$

La densité de la variable aléatoire Y est donc la fonction

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right],$$

qui correspond à celle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ex 17

Loi normale, calculs numériques

qoul



1. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(-1.2 \leq Z \leq 1.1)$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



On exprime la probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée Φ :

$$\begin{aligned} P(-1.2 \leq Z \leq 1.1) &= P(Z \leq 1.1) - P(Z < -1.2) \\ &= P(Z \leq 1.1) - P(Z > 1.2) && \text{par symétrie} \\ &= P(Z \leq 1.1) - (1 - P(Z \leq 1.2)) \\ &= \Phi(1.1) + \Phi(1.2) - 1 \\ &\approx 0,75 \end{aligned}$$

2. A l'aide des tables de valeurs, calculer $P(70 \leq QI \leq 130)$ où QI suit une loi $\mathcal{N}(100, \sigma = 15)$.



On pose $Z = \frac{QI - 100}{15}$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned} P(70 \leq QI \leq 130) &= P\left(\frac{70 - 100}{15} \leq \frac{QI - 100}{15} \leq \frac{130 - 100}{15}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times \Phi(2) - 1 \\ &\approx 0,95 \end{aligned}$$

3. A l'aide des tables de valeurs, déterminer un réel t tel que $P(|X - 5| < t) = 95\%$ où X suit une loi $\mathcal{N}(5, \sigma = 1)$.



On pose $Z = X - 5$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned} P(|X - 5| < t) &= P(-t < X - 5 < t) \\ &= P(-t \leq Z \leq t) \\ &= 2 \times \Phi(t) - 1 \end{aligned}$$

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} P(|X - 5| < t) = 0.95 &\iff 2 \times \Phi(t) - 1 = 0.95 \\ &\iff \Phi(t) = 0.975 \\ &\iff t \approx 1,96 \end{aligned} \quad \text{par lecture inverse de la table}$$

5 Couple de variables aléatoires

Ex 18

Densité

SxZb

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\mathbf{1}_{(\mathbb{R}^+)^2}(x, y).$$

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité.



On vérifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$. De plus, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Calculer $P(X > 1, Y < 1)$, $P(X < Y)$ et $P(X < a)$.



On applique la définition et on trouve $P(X > 1, Y < 1) = e^{-1}(1 - e^{-2})$, $P(X < Y) = \frac{1}{3}$ et $P(X < a) = 1 - e^{-a}$.

Ex 19

Lois marginales

T8Ws

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur le disque unité D centré en $(0, 0)$.

1. Déterminer le réel α tel que $f: (x, y) \mapsto \alpha \mathbf{1}_D(x, y)$ soit une densité caractérisant la loi du couple (X, Y) .



Le disque D a pour aire π donc (X, Y) admet pour densité $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_D(x, y)$

2. Déterminer la loi de X .



D'après le cours, X admet pour densité f_X définie par $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{\{y^2 < 1-x^2\}} dy$.

Or $y^2 < 1 - x^2 \iff \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ donc

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x)$$

Ex 20

Densité d'une somme

ROSQ

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Déterminer la loi de $S = X + Y$.



Si X et Y suivent chacune une loi uniforme sur $[0; 1]$, alors $S = X + Y$ admet une densité h définie par

$$h(s) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0;1]}(s-x)dx = \int_{s-1}^s \mathbf{1}_{[0;1]}(u)du$$

- si $s < 0$ alors $s - x < 0$ et $h(s) = 0$
- si $0 < s < 1$ alors $h(s) = \int_0^s \mathbf{1}_{[0;1]}(u)du = s$
- si $1 < s < 2$ alors $h(s) = \int_{s-1}^1 \mathbf{1}_{[0;1]}(u)du = 2 - s$
- si $2 < s$ alors $h(s) = 0$

En traçant cette densité, on voit apparaître une loi triangulaire.

Ex 21

Densité d'une somme

kkMH

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.



Si X et Y suivent chacune une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $S = X + Y$ admet une densité h définie par

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(s-x)^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Or $-(s-x)^2 - x^2 = -\frac{s^2}{2} - 2(x - \frac{s}{2})^2$ donc

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\frac{s}{2})^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sqrt{2}^2}}$$

Donc S suit une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{2}$.

Ex 22

Min et Max

oXIK

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable $\max(X_1, \dots, X_n)$ et en déduire la loi de cette variable aléatoire.



On note $V = \max(X_1, \dots, X_n)$. On sait que $P(V \leq t) = P((X_1 \leq t) \cap \dots \cap (X_n \leq t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$P(V \leq t) = P(X_1 \leq t)^n = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient ainsi la fonction de répartition de V . La densité de V s'obtient en dérivant cette fonction.

2. Calculer la loi de la variable $\min(X_1, \dots, X_n)$.



On note $U = \min(X_1, \dots, X_n)$. On sait que $P(U \geq t) = P((X_1 \geq t) \cap \dots \cap (X_n \geq t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$P(U \geq t) = P(X_1 \geq t)^n = \begin{cases} e^{-\lambda nt} & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la fonction de répartition de U est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda nt} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction densité de U s'obtient en dérivant cette fonction de répartition.

6 Inégalités, approximations

Ex 23

Estimation par inégalité

g115

Une population de personnes doit voter à l'élection présidentielle. La proportion souhaitant voter pour la candidate Mme A. est inconnue, on la note p . Pour approcher cette valeur, on effectue un sondage sur n personnes : l'échantillon est modélisé par une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_1, \dots, X_n)$ suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p ($X_i = 1$ si le i -ème individu souhaite voter pour Mme A., $X_i = 0$ sinon).

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ de sorte que $\frac{S_n}{n}$ représente la proportion de personnes votant pour Mme A. dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ?



S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Déterminer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.



On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. D'après les propriétés de l'espérance et de la variance, on en déduit que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = p$ et $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$



D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

et on conclut en remarquant que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

4. Comment choisir la taille de l'échantillon de sorte que le résultat du sondage soit proche de p à $\varepsilon = 0.05$ près avec une probabilité supérieure à 95% ?



Il faut choisir n tel que $\frac{1}{4}n\varepsilon^2 \leq 0.05$, on peut prendre $n = 2000$.

Ex 24

Optimisation par approximation

OuqI

Un usager de train effectue régulièrement 100 trajets par mois en première classe. On admet qu'à chacun de ses voyages, cet usager a une chance sur dix d'être contrôlé.

On suppose que cet usager fraude systématiquement en voyageant en première classe avec un titre de transport de seconde classe. La différence entre le prix d'un billet de première classe et celui d'un billet de seconde classe est de 1 euro. En cas de contrôle, le montant de l'amende à payer est noté α euros.

Quel est le montant minimum de l'amende α qu'il faudrait infliger à cet usager pour qu'il soit dissuadé de frauder en étant financièrement perdant à la fin du mois avec une probabilité supérieure à 95% ?



Soit X le nombre de fois dans le mois où l'usager est contrôlé. On a $X \sim \mathcal{B}(100, 0.1)$.

Sur un mois, l'usager fait un bénéfice de 100×1 euros sur sa fraude et perd $X \times \alpha$ euros en amende.

On cherche α tel que $P(100 - X\alpha < 0) \geq 0.95$.

On sait que $E(X) = 100 \times 0.1 = 10$ et $V(X) = 100 \times 0.1 \times 0.9 = 9$.

D'après le théorème central limite, la variable aléatoire $Z = \frac{X-10}{3}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite.

Or $P(100 - X\alpha < 0) = P(X > \frac{100}{\alpha}) = P(Z > \frac{100/\alpha - 10}{3})$. On cherche donc α tel que $P(Z > \frac{100/\alpha - 10}{3}) \geq 0.95$.

On a $P(Z > \frac{100/\alpha - 10}{3}) = 1 - P(Z \leq \frac{100/\alpha - 10}{3}) = 1 - \Phi\left(\frac{100/\alpha - 10}{3}\right)$. On cherche donc α tel que $1 - \Phi\left(\frac{100/\alpha - 10}{3}\right) \geq 0.95$ soit $\Phi\left(\frac{100/\alpha - 10}{3}\right) \leq 0.05$.

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\frac{100/\alpha - 10}{3} \leq -1.65$ soit $100/\alpha \leq -1.65 \times 3 + 10 = 5.05$ soit $\alpha \geq 100/5.05 = 19.8$.

L'amende doit donc être supérieure à 19.8 euros pour que l'usager soit dissuadé de frauder en étant financièrement perdant à la fin du mois avec une probabilité supérieure à 95%.

Ex 25

Application du théorème central limite

alNi

Soit $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 16$. Soit $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Quelle est la distribution de la variable aléatoire S selon le théorème central limite ?



Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 16$. La loi de chaque variable X_i n'est pas connue mais on sait que la moyenne et la variance sont finies. D'après le théorème central limite, la variable aléatoire $Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite avec $n = 100$ considéré comme grand.

Autrement dit, la variable aléatoire S suit approximativement une loi normale avec une moyenne donnée par $n\mu = 100 \times 30 = 3000$ et une variance donnée par $n\sigma^2 = 100 \times 16 = 1600$.

Calculez la probabilité que la somme S soit inférieure à 2900.



Pour trouver cette probabilité, on centre et on réduit la variable aléatoire :

$$Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} = \frac{S - 3000}{\sqrt{1600}}.$$

Donc, nous cherchons

$$P\left(Z < \frac{2900 - 3000}{\sqrt{1600}}\right) = P(Z < -2.5).$$

En utilisant la table de loi (ou un calculateur approprié), nous trouvons que la probabilité recherchée est d'environ 0.0062.

Exercices type examen



Ex 26

Simulation d'une loi normale

C5Fq

On tire sur une cible munie d'un repère orthonormé centrée sur son origine O . On note (X, Y) les coordonnées cartésiennes d'un tir. On remarque que lorsque le tireur vise le centre de la cible, la loi suivie par (X, Y) admet une densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}}$$

On note R la distance entre le point d'impact et le point visé.

1. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?



La densité marginale pour X est exprimée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \end{aligned}$$

De même, on calcule $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}$. On a ainsi $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ ce qui permet de conclure que X et Y sont deux variables indépendantes suivant chacune une loi normale centrée réduite.

2. Ecrire la fonction de répartition de R sous la forme d'une intégrale double, puis effectuer le changement de variables en coordonnées polaires pour simplifier l'expression.



On note $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq t^2\}$. Si $t \geq 0$, $F_R(t) = \mathbb{P}(R \leq t) = \mathbb{P}((X, Y) \in D_t)$ donc

$$F_R(t) = \iint_{D_t} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}} dx dy$$

On effectue dans l'intégrale double un changement de variables en coordonnées polaires : on a $dx dy = r dr d\theta$ d'où

$$F_R(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^t e^{-r^2/2} r dr \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^t r e^{-r^2/2} dr$$

et $F_R(t) = 0$ si $t < 0$.

3. En déduire une densité de R . La loi obtenue s'appelle la loi de Rayleigh.



On en déduit que la fonction $f_R(r) = r e^{-r^2/2} 1_{\mathbb{R}_+}$

4. Montrer que R^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.



Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(R^2)) &= \int_0^{+\infty} h(r) r e^{-r^2/2} dr \\ &= \int_0^{+\infty} h(u) \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de R^2 définie par $f_{R^2}(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$, on reconnaît une loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

5. Montrer que si Θ est la variable aléatoire telle que $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$, alors Θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(R, \Theta)) &= \iint \frac{1}{2\pi} h(r(x, y), \theta(x, y)) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} h(r, \theta) \frac{1}{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit qu'une densité du couple (R, Θ) est définie pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi[}(r, \theta)$$

Pour obtenir la loi de Θ , il suffit de calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f_{\Theta}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} g(r, \theta) dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0; 2\pi[}(r, \theta)\end{aligned}$$

On en déduit que (R, Θ) est un couple de variables aléatoires indépendantes et que Θ suit une loi uniforme sur $[0; 2\pi]$.

6. En déduire une simulation de la loi du couple (X, Y) .



```
def Normale2() : theta = 2*pi*rand() r = sqrt(-2*log(rand())) return r*cos(theta), r*sin(theta)
```

Ex 27

Files d'attente

9hTr

On considère deux files d'attente indépendantes. Deux personnes arrivent simultanément et se présentent respectivement aux deux files d'attente. On note X le temps d'attente de la première personne, Y le temps d'attente de la seconde personne, en minutes. On supposera que X et Y suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

1. Quel est le temps d'attente moyen pour chaque personne ?



Puisque X et Y suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0.5$ minutes, ce qui donne le temps d'attente moyen pour chaque personne.

2. Quelle est la densité de la variable X^2 ? la variable $-Y$?



Pour obtenir la loi de X^2 , on cherche sa densité par identification. Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X^2)) &= \int_0^{+\infty} h(x^2) 2e^{-2x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2h(u) e^{-2\sqrt{u}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de X^2 définie par $f_{X^2}(x) = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$.
On procède de même pour obtenir la loi de $-Y$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(-Y)) &= \int_0^{+\infty} h(-x) 2e^{-2x} dx \\ &= \int_0^{-\infty} 2h(u) e^{2u} \times (-du) \\ &= \int_{-\infty}^0 2h(u) e^{2u} du\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de $-Y$ définie par $f_{-Y}(y) = 2e^{2y} 1_{\mathbb{R}_-}(y) = f_Y(-y)$.

3. Calculer la probabilité que la différence d'attente entre les deux personnes soit inférieure à 1 minute.



On calcule $P(|X - Y| < 1) = P(-1 < X - Y < 1)$ en utilisant la loi du couple (X, Y) . Par indépendance de X et Y , le couple (X, Y) admet pour densité $g(x, y) = 2e^{-2x} \times 2e^{-2y} 1_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$. La probabilité cherchée est

$$P(|X - Y| < 1) = \iint_D g(x, y) dx dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, -1 < x - y < 1\} = \{y \in [0; 1], x \in [0; 1 + y]\} \cup \{y \in]1; +\infty, x \in [-1 + y; 1 + y]\}$.

On utilise cette décomposition du domaine D pour écrire l'intégrale sous forme d'une somme :

$$\begin{aligned}\iint_D g(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1+y} 2e^{-2x} dx 2e^{-2y} dy + \int_1^{+\infty} \int_{y-1}^{y+1} 2e^{-2x} dx 2e^{-2y} dy \\ &= \int_0^1 2e^{-2y} (1 - e^{-2(1+y)}) dy + \int_1^{+\infty} (e^{-2(y-1)} - e^{-2(y+1)}) (1 - e^{-2(1+y)}) dy \\ &= 1 - \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-6} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-6} \\ &= 1 - e^{-2}\end{aligned}$$

Ex 28

Mélange de lois, fonction de répartition

cRYI

Soit Z une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_Z définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Graphique : <https://www.geogebra.org/m/vat8nub8>

1. Vérifier que F_Z définit bien une fonction de répartition.



F_Z est définie continue à droite et croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x) = 1$. Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$. Peut-on dire que Z est une variable aléatoire absolument continue ?



$P(Z = 0) = F_Z(0^+) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. et $P(Z = 1) = F_Z(1^+) - F_Z(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
Comme $P(Z = 0) \neq 0$, la variable Z n'est pas absolument continue.

3. On considère $Y: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $P(Y = k) = \alpha P(Z = k)$ pour tout $k \in \{0; 1\}$ où α est un paramètre réel à déterminer.

- (a) Montrer que nécessairement, $\alpha = \frac{12}{5}$.



On a $P(Y = 0) = \alpha P(Z = 0) = \frac{1}{4}\alpha$ et $P(Y = 1) = \alpha P(Z = 1) = \frac{1}{6}\alpha$. Comme $P(Y = 0) + P(Y = 1) = 1$, on en déduit que $\alpha = \frac{12}{5}$.

- (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y .



La fonction de répartition de Y vaut $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ P(Y = 0) & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ P(Y = 0) + P(Y = 1) & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$ donc

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{3}{5} & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

4. On pose $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction F .



$$F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{12} - \frac{1}{3x} & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Démontrer qu'en multipliant F par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X .



La fonction $\frac{12}{7}F_Z$ est définie continue et croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 1$. Il est donc clair que $\frac{12}{7}F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , qui est absolument continue.

6. Déterminer une densité de probabilité de la variable X .



Par dérivation,

$$f_X(x) = \frac{12}{7} F'_X(x) \begin{cases} \frac{24}{7(2-x)^3} & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{7x^2} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}.$$

Ex 29

Suite de variables aléatoires

ZT9T

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1 - \theta)1_{[-\frac{1}{2}; 0]}(x) + (1 + \theta)1_{]0; \frac{1}{2}]}(x)$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. A quelles conditions sur θ la fonction f_θ est bien une densité de probabilité ?



La fonction f_θ est une densité de probabilité si elle est intégrable, positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1.

- La positivité impose $-1 \leq \theta \leq 1$.
- $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx = \int_{-1/2}^0 (1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(1 + \theta) = 1$ donc ne fournit pas de condition spécifique sur θ .

En synthèse, f_θ est une densité si et seulement si $|\theta| \leq 1$.

2. Calculer l'espérance de X .



C'est une simple application de la définition

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x) dx \\ &= \int_{-1/2}^0 x(1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} x(1 + \theta) dx \\ &= \left[(1 - \theta) \frac{x^2}{2} \right]_{-1/2}^0 + \left[(1 + \theta) \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\theta}{4} \end{aligned}$$

3. Soient n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X . On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty; 0]}(X_i) \quad V_n = \sum_{i=1}^n 1_{]0; +\infty[}(X_i)$$

- (a) Vérifier que si $1 \leq i \leq n$ alors la variable aléatoire $1_{]0; +\infty[}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.



La variable aléatoire

$$p = P(1_{]0;+\infty[}(X_i) = 1) = P(X_i \in]0; +\infty[) = \int_0^{+\infty} f_\theta(x) dx = \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1 + \theta}{2}$$

d'où $1_{]0;+\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$.

(b) En déduire que V_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.



Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $(1_{]0;+\infty[}(X_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$, qui sont telles que $1_{]0;+\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Donc V_n est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1+\theta}{2}$. On en conclut que $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1+\theta}{2}\right)$.

(c) Vérifier que la variable aléatoire $U_n + V_n$ est constante.



$$U_n + V_n = \sum_{i=1}^n (1_{]-\infty;0]}(X_i) + 1_{]0;+\infty[}(X_i)) = \sum_{i=1}^n 1_{\mathbb{R}}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

(d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{V_n - U_n}{n}$.



$$\mathbb{E}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{V_n - (n - V_n)}{n}\right) = \frac{2}{n} \mathbb{E}(V_n) - 1 = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$$

(e) Vérifier que $\mathbb{E}(U_n V_n) = (n^2 - n) \frac{1-\theta^2}{4}$ et en déduire $\text{cov}(U_n, V_n)$.



$$\mathbb{E}(U_n V_n) = \mathbb{E}((n - V_n) V_n) = n\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(V_n^2)$$

or $V_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1+\theta}{2})$ donc

$$\begin{aligned} - \mathbb{E}(V_n) &= n \times \frac{1+\theta}{2} \\ - V(V_n) &= n \times \frac{1+\theta}{2} \times (1 - \frac{1+\theta}{2}) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2), \text{ or } V(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2 \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n V_n) &= \frac{n^2}{2}(1 + \theta) - \left(\frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2 \right) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 + \theta)(2 - (1 + \theta)) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= (n^2 - n) \frac{1 - \theta^2}{4} \end{aligned}$$

On en déduit la covariance :

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_n, V_n) &= \mathbb{E}(U_n V_n) - \mathbb{E}(U_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \mathbb{E}(n - V_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \left(n - \frac{n}{2}(1 + \theta) \right) \frac{n}{2}(1 + \theta) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{-n}{4}(1 - \theta^2) \end{aligned}$$

(f) Montrer que la variance de $\frac{V_n - U_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.



$$\begin{aligned} V\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} (V(U_n) + V(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n)) \\ &= \frac{1}{n^2} (2V(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n)) \quad \text{car } V(U_n) = V(n - V_n) = V(V_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{2}(1 - \theta^2) + \frac{n}{2}(1 - \theta^2) \right) \\ &= \frac{1 - \theta^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ex 30

Lois, fonctions caractéristiques pour un couple

xC03

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = k(1 + xy(x^2 - y^2))\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y).$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité associée à un couple de variables aléatoires (X, Y) .



f est positive sur $\mathbb{R}$ si $k \geq 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(1 + x^3 y - xy^3) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 k \left[x + \frac{1}{4} x^4 y - \frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_{x=-1}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 2k dy \\ &= 4k. \end{aligned}$$

Pour $k = \frac{1}{4}$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ donc f est une densité de probabilité.

2. Déterminer les densités marginales du couple (X, Y) , ainsi que leurs fonctions caractéristiques. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?



Les lois marginales de X et de Y sont

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \int_{-1}^1 (1 + x^3 y - xy^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x). \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient $f_Y(y) = \frac{1}{2} \chi_{[-1;1]}(y)$. Donc X et Y sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{it} e^{itx} \right]_{x=-1}^{x=1} \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0. \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}(1) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$. Comme X et Y sont de même loi, on a également pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_Y(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car leur densité jointe n'est pas le produit de leurs densités marginales.

3. Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$.



Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 \phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx} e^{ity} f(x, y) dx dy \quad (\text{théorème de transfert}) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{itx} e^{ity} dx dy + \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -1^1 x^3 y e^{itx} e^{ity} dx dy - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -1^1 xy^3 e^{itx} e^{ity} dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \int_{-1}^1 e^{ity} dy + 0 \\
 &= \left[\frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \right]^2 \\
 &= \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2
 \end{aligned}$$

et par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ en 0, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X+Y}(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2.$$

Ici, on peut remarquer que nous avons l'égalité $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ malgré le fait que les variables aléatoires X et Y ne soient pas indépendantes.